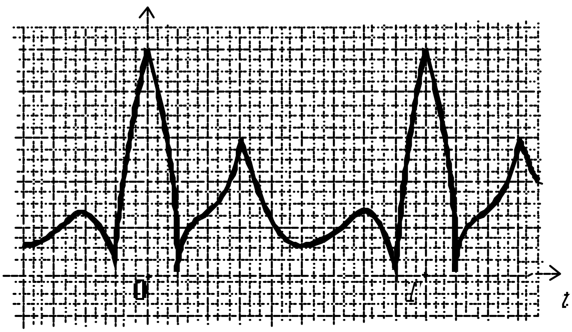
TRANDAFIR T. B{LAN

CAPITOLE DE MATEMATICI APLICATE

- ANALIZ{ FOURIER -



EUC

EDITURA UNIVERSITARIA
CRAIOVA

TRANDAFIR T. B{LAN

CAPITOLE DE MATEMATICI APLICATE

- ANALIZ{ FOURIER -

EUC

EDITURA UNIVERSITARIA
CRAIOVA, 1998

Referen\i]tiin\ifici:

Prof.univ.dr. Peter KESSLER

Lect.univ.dr. Ion B{RBULESCU

Tehnoredactare computerizat[:

Mariana NICOLESCU

ISBN: 973-9271-27-8

n memoria profesorului
Dr.doc. Eugen V. Dobrescu

TRANDAFIR T. B{LAN

CAPITOLE DE MATEMATICI APLICATE

- ANALIZ{ FOURIER -

P R E F A | {

Prezentul volum este primul dintr-o serie de Capitole de Matematici Aplicate. Am @nceput cu Analiza Fourier deoarece, cel pu\in pe plan local, bibliografia existent[dezvolt[doar par\ial tematica de interes pentru cei ce se preg[tesc @n vederea utiliz[rii matematicii @n probleme inginere]ti, practice. Astfel, de cele mai multe ori, fie c[se abordeaz[prea sumar una din laturile teorie / probleme, fie se lucreaz[la un nivel prea abstract, nesemnificativ pentru practician, care solicit[, de exemplu, st[p`nirea integralei Lebesgue sau a unor tehnici avansate de analiz[func\ional[.

Prin con\inutul ei, cartea acoper[programa analitic[specific[cursurilor de Matematici Speciale predate @n facult[\ile tehnice, dar se adreseaz[@n aceea]i m[sur[tuturor celor care doresc s[aprofundeze metodele teoretice specifice, sau se intereseaz[de aplica\iile analizei Fourier. Pentru a r[spunde diversit[\ii solicit[rilor de documentare, am redactat mai multe anexe privind aspecte speciale. Se presupune c[cititorul are cuno]tin\e de baz[@n analiza real[ ]i @n cea complex[con\inute, conform programei, de cursurile anterioare de Analiz[matematic[ ]i Matematici speciale.

Partea teoretic[con\ine demonstra\ii detaliate, @n care se respect[rigoarea matematic[ ]i se adopt[un limbaj actualizat. Viz`nd aplica\ii directe, teoria este dezvoltat[ @n termeni de integral[ Riemann. De asemenea, cu c`teva mici excep\ii, se evit[no\iunea de distribu\ie, pentru care consider[m c[sunt necesare mai multe cuno]tin\e de analiz[func\ional[ ]i ar face obiectul unui curs aparte. Pentru auto-verificarea gradului de @n\elegere]i a poten\ialului de utilizare a cuno]tin\elor teoretice, sunt propuse cititorului, respectiv studentului la seminar, o serie de probleme la sf`r]itul fiec[rui paragraf. Toate problemele sunt urmate de indica\ii de rezolvare, unele chiar foarte elaborate, ca model de rezolvare.

De fapt prin aceast[carte am @ncercat s[sintetizez experien\a acumulat[de-a lungul anilor de c[tre colectivul celor care au predat @n @nv[\[m`ntul tehnic aici, la Universitatea din Craiova. #n c`]tigarea acestei experien\e cursurile regretatului prof.univ.dr.doc. Eugen V. Dobrescu au fost piatr[de c[p[t`i pentru mul\i dintre noi.

Mul\umesc]i pe aceast[cale celor care prin sugestiile]i observa\iile lor m-au ajutat s[realizez prezenta lucrare. #n mod special sunt recunosc[tor D-lor Prof.univ.dr. Peter Kessler]i Lect.univ.dr. Ion B[rbulescu, care au avut amabilitatea s[citeasc[manuscrisul]i s[fac[o serie de observa\ii care mi-au fost foarte utile, @mbun[t[\ind efectiv at`t forma c`t]i con\inutul c[r\ii. De asemenea, m[rturisesc cu recuno]tin\[sprijinul deosebit de care m-am bucurat pe parcursul redact[rii din partea D-nei informatician Mariana Nicolescu, care a avut r[bdarea s[urmeze meandrele c[ut[rilor @n finisarea manuscrisului]i profesionismul s[tehnoredacteze materialul @ntr-o form[excep\ional[.

Autorul

Capitolul I. SERII FOURIER

§1. Func\ii periodice. No\iunea de serie Fourier

Vom da c`teva propriet[\i remarcabile ale func\iilor periodice care vor fi utile @n paragrafele urm[toare]i vom formula problemele fundamentale legate de seriile Fourier.

1. **Defini\ie**. *Spunem despre func\ia* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *c[este* ***periodic[*** *]i are* ***perioada*** $T\in\mathbf{R}_{+}^{*}$, *dac[pentru orice* $x\in\mathbf{R}$ *avem*

$$f(x+T)=f(x).$$

Cea mai mic[dintre perioade (dac[exist[) se nume]te perioad[***fundamental[, principal[,*** *sau* ***minim[****.*

Desigur, proprietatea de periodicitate se poate extinde]i la func\ii definite pe o mul\ime $D\subset\mathbf{R}$, dac[pentru orice $x\in D$ avem $x+T\in D$.

2. **Exemple**. a) Printre cele mai importante func\ii periodice men\ion[m semnalele ***armonice fundamentale***, exprimate prin func\ii trigonometrice (Fig.1.1.)

$$f(t)=A\sin(w\,t+j),$$

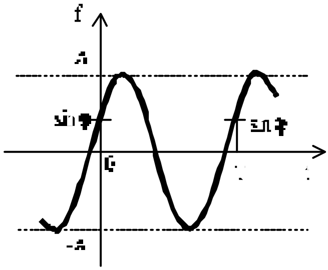


Fig.1.1.

unde *A* este numit[***amplitudinea*** semnalului, w - ***pulsa\ie***, $w\,t + j$ -***faz[***, iar j =***faz[ini\ial[***. Se verific[cu u]urin\[c[dac[$w \neq 0$, atunci, *f* este o func\ie periodic[, cu perioada (minim[) $T = \dfrac{2p}{w}$. Num[rul $n = \dfrac{1}{T} = \dfrac{w}{2p}$ se nume]te ***frecven\[*** a semnalului *f*.

b) Not[m cu $[x]$ ***partea @ntreag[*** a num[rului $x \in \mathbf{R}$, adic[cel mai mare num[r @ntreg dintre cele mai mici dec`t *x*. Func\ia ***parte zecimal[*** $f(x) = x - [x]$ (figura 1.2.) este periodic[ cu perioada $T = 1$. Ea este @nt`lnit[@n practic[la tensiunea de baleiaj din osciloscoape.

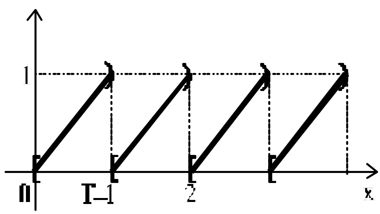


Fig.1.2.

c) Fie $f:[a,b) \to \mathbf{R}$ @nc`t $0 < l = b - a < \infty$. Pentru fiecare $x \in \mathbf{R}$ definim $k(x) = \left[\dfrac{x-a}{l}\right]$, unde $[\ \cdot\ ]$ @nseamn[parte @ntreag[. Se vede u]or c[$x - l\,k(x) \in [a,b)$]i c[func\ia

$\overline{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, exprimat[prin $\overline{f}(x)= f(x-lk(x))$ este periodic[, cu perioada $T=l$. Func\ia $\overline{f}$ se nume]te ***prelungirea periodic[*** a func\iei f (figura 1.3.).

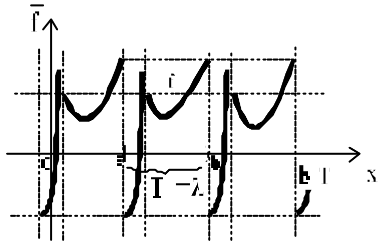


Fig.1.3.

d) No\iunea de func\ie periodic[este o idealizare matematic[a unor fenomene periodice din experien\a noastr[zilnic[, cum sunt: trecerile a]trilor (inclusiv soarele]i luna) la meridian, curentul electric alternativ, pendulul etc. Ca exemplu, @n figura 1.4. este reprezentat un ciclu al ritmului cardiac, a]a cum apare pe electrocardiogram[.

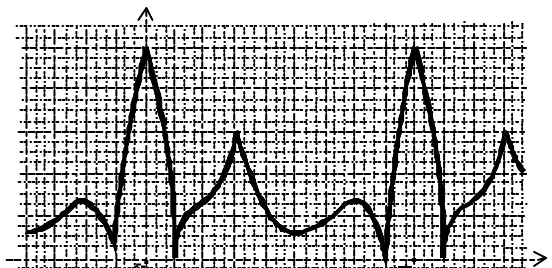


Fig.1.4.

Desigur, pentru a califica asemenea fenomene drept "periodice" no\iuni matematice ca "egalitate", "infinit" etc. trebuie @n\elese @n accep\iunea mai larg[a practicianului.

Cunosc`nd anumite func\ii periodice putem ob\ine alte func\ii periodice pe cale algebric[, a]a cum arat[propozi\ia urm[toare:

3. **Propozi\ie**. *Mul\imea tuturor func\iilor periodice* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *(sau definite pe aceea]i mul\ime D), cu aceea]i perioad[T, formeaz[o subalgebr[a algebrei tuturor func\iilor reale.*

Demonstra\ie. Se verific[u]or c[dac[*f*]i *g* au perioada *T*, atunci *f+g*]i *fg* au perioada *T*. ❑

4. **Observa\ie.** Prin opera\ii algebrice (sume, produse etc.) cu dou[func\ii periodice care au o perioad[comun[se pot ob\ine func\ii cu perioade inferioare perioadei comune minime. Ca exemplu, $f(x)=\sin x$]i $g(x)=\cos x$ au perioada minim[comun[$2p$, dar produsul $(fg)(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ are perioada principal[p. La fel, func\iile

$$f(x)=\begin{cases}\ln|\sin x|, & x\neq kp\\ 0, & x=kp\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\ln|\cos x|, & x\neq \frac{p}{2}+kp\\ 0, & x=\frac{p}{2}+kp\end{cases}$$

au perioada minim[comun[p, @n timp ce *f+g* are perioada fundamental[$\frac{p}{2}$.

#n ceea ce prive]te propriet[\ile perioadelor men\ion[m:

5. **Propozi\ie**. a) *Dac[T este perioad[pentru func\ia f, atunci]i kT este perioad[a lui f, oricare ar fi* $k\in\mathbf{N}$*.*

b) *Orice func\ie neconstant[, periodic[ ]i continu[admite o perioad[minim[(strict pozitiv[).*

c) *Dac[T este perioada fundamental[a unei func\ii continue neconstante, atunci pentru orice alt[perioad[* T' *a acesteia avem* $T' = kT$*, pentru un* $k \in \mathbf{N}^*$.

d) *Dac[func\iile f]i g au perioadele* T_f *respectiv* T_g *]i* $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbf{Q}$*, atunci exist[o perioad[comun[.*

e) *Dac[func\iile f]i g sunt continue, neconstante]i au o perioad[comun[, atunci @ntre perioadele lor principale* T_f *]i* T_g *exist[rela\ia* $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbf{Q}$*.*

Demonstra\ie. a) Induc\ie matematic[dup[$k \in \mathbf{N}$. b) Dac[prin absurd presupunem c[nu exist[o perioad[minim[a lui *f*, va exista un]ir $\{T_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de perioade $T_n > 0$, @nc`t $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = 0$. Cazul $T_n \to T_0 > 0$ conduce la T_0 perioad[pozitiv[minim[, c[ci $f(x + T_0) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x + T_n) = f(x)$, deci se exclude.

A]a cum se vede @n figura 1.5., orice $x \in \mathbf{R}$ se poate scrie @n forma $x = \sum\limits_{n \in \mathbf{N}} k_n T_n$, unde pentru analogia cu scrierea zecimal[putem lua $T_{n+1} < T_n$.

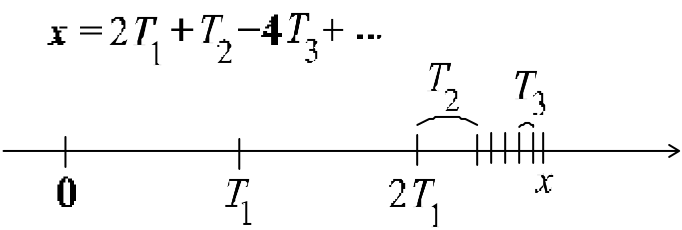


Fig.1.5.

#n consecin\[mul\imea $\{kT_n : k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ este dens[pe **R**]i $f(kT_n) = f(0)$. Din continuitate rezult[c[*f* ar trebui s[fie constant[.

c) #n caz contrar $T' = kT + r$, unde $r < T$. Deoarece num[rul $r = T' - kT$ este]i el perioad[, este contrazis[minimalitatea perioadei fundamentale T.

d) Dac[$\frac{T_f}{T_g} = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbf{N}^*$, rezult[imediat c[$T = pT_g = qT_f$ este perioad[at`t pentru *f* c`t]i pentru *g*.

e) Dac[*T* este perioad[comun[, atunci conform c), vor exista $m, n \in \mathbf{N}^*$ astfel @nc`t $T = mT_f$]i $T = nT_g$.

#n concluzie $\frac{T_f}{T_g} = \frac{n}{m} \in \mathbf{Q}$. ❑

Proprietatea ce urmeaz[arat[c[dac[o func\ie periodic[este integrabil[, atunci integrala ei pe un segment de lungime egal[cu perioada nu depinde de pozi\ia acestui segment pe ax[, dup[cum se ilustreaz[@n figura 1.6.

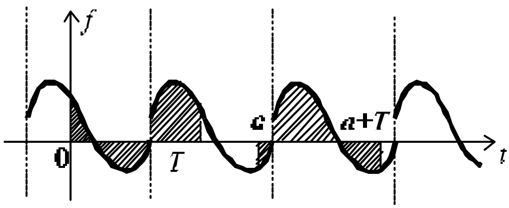


Fig.1.6.

6. **Propozi\ie**. *Dac[func\ia local integrabil[* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *are perioada T, atunci oricare ar fi* $a \in \mathbf{R}$*, avem*

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \ .$$

Demonstra\ie. Descompunem prima integral[

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$$

]i observ[m c[ultima integral[se scrie

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt \ .$$

#nlocuind @n descompunere g[sim formula c[utat[. ❑

Pentru alte propriet[\i, de exemplu privind derivarea, se pot vedea problemele de la sf`r]itul paragrafului.

#n studiul calitativ al func\iilor periodice nu este esen\ial[valoarea perioadei, deoarece printr-o schimbare simpl[de variabil[putem reduce problemele la cazul unei perioade *standard*, care de obicei se ia $2p$. Aceast[reducere se bazeaz[pe urm[toarea:

7. **Propozi\ie**. *Dac[* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *este o func\ie de perioad[* $2p$, *atunci func\ia* $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *exprimat[prin*

$$F(x) = f(w\,x),$$

cu $w = \dfrac{2p}{T}$, *este o func\ie periodic[, cu perioada T.*

Demonstra\ie. Prin ipotez[avem $f(t+2p)=f(t)$ pentru orice $t\in\mathbf{R}$. Schimbarea de variabil[$t=w\,x$ este justificat[prin corresponden\a lui $t\in[0,2p]$ cu $x\in[0,T]$, care @n cel mai simplu caz este liniar[; scriind $t=ax+b$, g[sind $a=w$]i $b=0$. Periodicitatea lui *F* rezult[prin calcul direct:

$$F(x+T)=f(w(x+T))=f(w\,x+2p)=f(w\,x)=F(x)\quad\square$$

Rezult[astfel c[func\iile trigonometrice $\sin nt$]i $\cos nt$, unde $n\in\mathbf{N}$, joac[un rol deosebit @n teoria func\iilor periodice.

8. **Defini\ie**. *Se nume]te* ***sistem trigonometric*** *(sau* ***Fourier****) mul\imea*

$$T=\{1,\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,...\}.$$

Orice sum[de forma

$$P_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

se nume]te ***polinom trigonometric****. Numerele* $a_0,a_k,b_k\in\mathbf{R}$ *se numesc* ***coeficien\ii*** *polinomului*.

9. **Observa\ii**. a) Orice polinom trigonometric este o func\ie periodic[de perioad[$2p$. Dac[not[m $A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$, putem determina totdeauna $j_k\in[0,2p)$ astfel @nc`t $a_k=A_k\sin j_k$]i $b_k=A_k\cos j_k$, astfel c[polinomul trigonometric se poate scrie]i cu ajutorul armonicelor fundamentale, $\sin(kt+j_k)$, sub forma

$$P_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}A_k\sin(kt+j_k).$$

#n acela]i timp se vede c[orice func\ie din T este o armonic[fundamental[, de perioad[$2p$. Dac[exist[pericolul unor confuzii se poate nota T_{2p} @n loc de T .

b) #n unele probleme este util s[se scrie polinoamele trigonometrice @n ***form[complex[***, cu ajutorul func\iilor exponen\iale. Astfel, \in`nd cont de formulele lui Euler (vezi [20], [29], etc.)

$$\cos kt = \frac{1}{2}\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right)$$

$$\sin kt = \frac{1}{2i}\left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right)$$

putem scrie

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikt} + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikt} .$$

Cu nota\iile $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), c_0 = \frac{a_0}{2}$]i $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$, polinomul trigonometric devine

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

]i se spune c[este scris @n form[complex[. Dac[introducem nota\ia $e^{it} = z$, polinomul ia forma $P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k$, unde @n particular se reg[sesc polinoamele @n sens uzual.

c) Prin analogie cu sistemul trigonometric T_{2p}, se poate considera un ***sistem trigonometric generalizat***.

$$\mathrm{T}_{T} = \{1, \cos w\,t, \sin w\,t, \cos 2w\,t, \sin 2w\,t, \ldots\}$$

format din func\ii de perioad[$T = \dfrac{2p}{w}$. #n acest caz polinomul ***trigonometric de perioad[T*** va avea forma

$$P_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kw\,t + b_k \sin kw\,t)$$

]i toate celelalte formule se vor transforma conform propozi\iei 7. Pentru simplitatea scrierii ne vom referi @n continuare cu prec[dere la sistemul T_{2p}.

10. **Defini\ie**. *Se nume]te **serie trigonometric[** (sau serie Fourier) orice sum[de forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

*unde $a_0, a_n, b_n \in \mathbf{R}$ pentru to\i $n \in \mathbf{N}^*$, se numesc **coeficien\i Fourier**.*

11. **Observa\ii**. a) Seriile trigonometrice apar ca serii de func\ii periodice, definite pe toat[dreapta real[. Ca la orice serie, sensul sumei infinite este acela de limit[a sumelor par\iale, care sunt polinoame trigonometrice. Pe mul\imea punctelor de convergen\[, seria trigonometric[define]te o nou[func\ie numit[***suma seriei***. Desigur, suma seriei va fi]i ea func\ie periodic[de perioad[$2p$.

b) Ca]i polinoamele trigonometrice, seriile Fourier pot fi scrise]i @n alte forme, ca de exemplu @n forma complex[

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt},$$

sau cu func\ii de perioad[T arbitrar[, dac[introducem]i pulsa\ia w:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nwt + b_n \sin nwt).$$

c) Men\ion[m c[seriile trigonometrice pot fi scrise]i ca serii de puteri complexe dac[se introduce nota\ia $z = e^{it}$, c`nd se ob\in serii ***Laurent*** (vezi [20], [29], etc.):

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k z^k,$$

unde $|z| = 1$.

12. **Problemele fundamentale ale seriilor Fourier**, @n func\ie de punctul de vedere (practic sau teoretic), sunt urm[toarele:

A: Din punct de vedere practic, ingineresc:

A1. **Analiza semnalului periodic**: av`nd un semnal periodic (dat, concret), s[se stabileasc[din ce semnale armonice fundamentale este acesta compus.

A2. **Sinteza unui semnal periodic**: dorind un anume semnal periodic (necesar @ntr-un anume loc, @ntr-un circuit etc.), s[se stabileasc[ce combina\ie de armonice fundamentale va sintetiza realmente acest semnal.

B. Din punct de vedere teoretic, matematic:

B1. **Calculul coeficien\ilor Fourier**: fiind dat[o func\ie real[periodic[, presupus[sum[a unei serii Fourier, s[se afle coeficien\ii Fourier ai acestei serii.

B2. **Convergen\a seriilor Fourier**: av`nd o serie Fourier, s[se stabileasc[unde]i cum converge aceasta, precum]i c[tre cine converge.

Desigur, noi vom aborda problematica seriilor Fourier din punctul de vedere matematic.

Rezolvarea celor dou[probleme B1]i B2 necesit[precizarea unor clase de func\ii]i a unor tipuri de convergen\[pe aceste spa\ii. Un rol deosebit @l joac[no\iunea de ***produs scalar*** a dou[func\ii dintr-un asemenea spa\iu, a]a cum vom vedea @n paragraful urm[tor.

P R O B L E M E

§ I. 1.

1 S[se determine perioada principal[a func\iei

$$f(x) = \sin 35x + \cos 42x$$

Solu\ie. Din condi\ia ca $T > 0$ s[fie perioad[, $\sin 35(x+T) + \cos 42(x+T) = \sin 35x + \cos 42x$, f[c`nd $x = 0$, apoi $x = p$, deducem:

$$\begin{cases} \sin 35T + \cos 42T = 1 \\ -\sin 35T + \cos 42T = 1 \end{cases}$$

adic[$\cos 42T = 1$]i $\sin 35T = 0$. #n consecin\[,

$$T \in \left\{ \frac{k'p}{21}, k' \in \mathbf{Z} \right\} \bigcap \left\{ \frac{k''p}{35}, k'' \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Din condi\ia $\dfrac{k'}{3} = \dfrac{k''}{5}$, deducem $k'' = 5k$]i $k' = 3k,\ k \in \mathbf{Z}$, deci $T = k\dfrac{p}{7}$. Deoarece aceast[valoare s-a dedus impun`nd doar ca dou[valori (cea @n $x = 0$]i cea @n $x = p$) s[se repete, trebuie s[revenim la condi\ia de periodicitate pentru to\i $x \in \mathbf{R}$, de unde rezult[$\sin 35x = \sin(35x + 5kp)$, *adic[k trebuie s[fie num[r par*. #n concluzie, perioada principal[este $T = \dfrac{2p}{7}$.

2 Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o func\ie periodic[, de perioad[*T*, derivabil[pe por\iuni pe $[0, T]$. Ar[ta\i c[ ]i derivata sa este o func\ie periodic[, cu perioada mai mic[sau egal[cu *T*.

Indica\ie. Folosind periodicitatea @n limita care d[derivata, se ob\ine perioada *T* pentru derivata. Un exemplu arat[c[perioada minim[a lui f' poate fi mai mic[.

3 Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o func\ie periodic[, de perioad[*T*]i integrabil[pe orice compact din **R**. S[se arate c[ ]i func\ia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, exprimat[prin:

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}[f(t)-a]dt\ ,$$

unde $a=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt$, este periodic[, cu aceea]i perioad[.

Indica\ie. $\displaystyle\int_{x_0}^{x+T}[f(t)-a]dt=F(x)+\int_0^T[f(t)-a]dt$.

Se vede c[*a* are semnifica\ia unei medii, iar sc[derea lui *a* din *f* se interpreteaz[ca o deplasare a axei Ox pe ***mijlocul*** graficului lui *f* (figura 1.7.) @nc`t integrarea dup[o perioad[s[dea mereu 0.

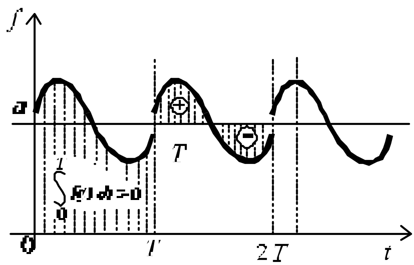


Fig.1.7.

4 Fie $f_0:[0,1]\to\mathbf{R}$ definit prin $f_0(x)=3x^2$]i fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ prelungirea sa periodic[. Determina\i $a\in\mathbf{R}$ astfel @nc`t *f-a* s[aib[primitivele periodice.

Indica\ie. *T*=1]i $a=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=1$, ca @n problema 3.

5 S[se scrie func\iile:

a) $f(x)=2\sin^3 x+\cos^2 x-\sin x+5$;

b) $g(x) = \sin^2 x + 3\cos 2x + \sin \frac{x}{2} - 1;$

c) $h(x) = 3\cos^2(2x + \frac{p}{6}) - 2\sin(\frac{x}{2} - \frac{p}{4}).$

sub form[de:

1) polinom trigonometric real;

2) polinom trigonometric complex;

3) sum[de puteri ale lui $z = e^{ix}$.

Indica\ie. Se trece la func\iile multiplului de arc. #n cazul b) avem $w = \frac{1}{2}$.

6 Ar[ta\i c[orice $T \in \mathbf{Q}_+^*$ este perioad[pentru func\ia:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dac[} \quad x \in \mathbf{Q} \\ -1 & \text{dac[} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Indica\ie. Dac[$x \in \mathbf{Q}$, atunci]i $x + T \in \mathbf{Q}$, iar dac[$x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, atunci]i $x + T \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

7 Ar[ta\i c[dac[$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este par[(impar[) @n raport cu 0]i cu *l* (>0), atunci *f* este periodic[, cu perioada *T*=2*l*.

Indica\ie. Din $f(-x) = \pm f(x)$]i $f(l + x) = \pm f(l - x)$ deducem $f(x + 2l) = f(l + x + l) = \pm f(l - x - l) = \pm f(-x) = f(x)$.

8 Func\iile $R_n(x) = sgn \sin 2^{n+1} px, \quad n = 0,1,...$ se numesc func\ii Rademacher. Ar[ta\i c[fiecare func\ie Rademacher este periodic[ ]i calcula\i:

$$I=\int_0^1 R_n(x)dx \quad \text{]i} \quad J=\int_0^1 R_n^2(x)dx\,.$$

Indica\ie. R_n are perioada $T_n=2^{-n}$, a]a cum rezult[ ]i din grafice. *I*=0 deoarece R_n este impar[. *J*=1 deoarece R_n^2=1.

9 Pentru $n\in\mathbf{N}$, func\iile lui Walsh se definesc cu ajutorul func\iilor lui Rademacher astfel:

$W_0=1$

$W_n=R_k$ dac[$n=2^k$

$W_n=R_{n_1}R_{n_2}\ldots R_{n_s}$ dac[$n=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_s}$,

unde $n_1>n_2>\cdots>n_s$ ca @n scrierea binar[a lui *n*.

Trasa\i graficele primelor 16 func\ii Walsh]i ar[ta\i c[:

a) W_n sunt periodice]i stabili\i perioada minim[;

b) pentru orice $n\in\mathbf{N}$]i $x\in\mathbf{R}$ avem:

$$W_n(x)=\frac{1}{2}[W_n(x+0)+W_n(x-0)];$$

c) $\int_0^1 W_n(x)dx=0$]i $\int_0^1 W_n^2(x)dx=1$, oricare ar fi *n*>0.

Indica\ie. a) Perioada este 1 pentru W_3, W_5, W_7 etc.

b) Func\iile Rademacher au aceea]i proprietate.

c) Lungimea intervalelor pe care W_n este +1 este egal[cu cea a intervalelor pe care W_n este -1.

§2. Produs scalar pe spa\ii de func\ii

Vom extinde no\iunea de produs scalar cunoscut[pentru vectori din $\mathbf{R}^3$ ca fiind *produsul m[rimilor vectorilor]i al cosinusului unghiului dintre ei*, sau din $\mathbf{R}^n$, unde produsul scalar al vectorilor $x=(x_1,\ldots,x_n)$]i $y=(y_1,\ldots,y_n)$ este

$$<x,y>=x_1y_1+\cdots+x_ny_n,$$

la cazul mai general al produsului scalar a dou[func\ii. Pentru aceasta s[observ[m c[ ]i vectorul $x\in\mathbf{R}^n$ este de fapt o func\ie definit[pe o mul\ime finit[, anume $x:\{1,\ldots,n\}\to\mathbf{R}$, unde $x(i)=x_i$, pentru to\i $i=1,\ldots,n$.

Astfel, se vede c[produsul scalar @n $\mathbf{R}^n$ are forma:

$$<x,y>=\sum_{i=1}^{n}x(i)y(i),$$

care poate fi u]or extins[la cazul a dou[func\ii arbitrare: dac[func\iile sunt]iruri (adic[$x,y:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$), consider[m

$$<x,y>=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)y(n),$$

iar dac[func\iile sunt definite pe un interval $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$, consider[m

$$< x, y >= \int_a^b x(t)y(t)dt \,.$$

Desigur, @n aceste cazuri o prim[problem[este convergen\a seriei, respectiv existen\a integralei prin care este definit produsul scalar. Presupun`nd c[produsul astfel definit are sens, se constat[c[au loc unele propriet[\i comune, care conduc la formarea no\iunii de produs scalar pe un spa\iu arbitrar, prezentat[mai jos (cf. [8], [26], [31], etc.).

1. **Defini\ie**. *Fie* X *un spa\iu liniar real sau complex. Numim* ***produs scalar*** *pe spa\iul* X *orice func\ional[* $<\cdot,\cdot>$:X $\times$X $\to \Gamma$ *care @ndeplinе]te condi\iile*:

i) $< ax + by, z >= a < x, z > + b < y, z >$ *pentru orice* $a, b \in \Gamma$

]i orice $x, y, z \in$X *(liniaritate)*;

ii) $< x, y >= \overline{< y, x >}$ *pentru orice* $x, y \in$X *(conjugat-simetrie)*;

iii) $< x, x >= 0$ *dac[ ]i numai dac[* $x = 0$ *(nedegenerare)*;

iv) $< x, x >\geq 0$ *pentru orice* $x \in$X *(pozitivitate)*.

#n cazul spa\iilor liniare reale, a doua condi\ie se reduce la simetrie, $< x, y >=< y, x >$. A]a cum este formulat[, chiar dac[spa\iul este complex, condi\ia ii) ne asigur[c[$< x, x >\in \mathbf{R}$.

Perechea (X $, <\cdot,\cdot>$) se nume]te ***spa\iu cu produs scalar***, sau spa\iu ***prehilbertian***.

2. *Exemple*. Se verific[u]or (exerci\iu) c[urm[toarele spa\ii sunt prehilbertiene.

1^{o}. ***Spa\iul euclidian ponderat real*** este, ca mul\ime, $\mathbf{R}^n$, cu un $n \in \mathbf{N}^*$ fixat, pe care se define]te produsul scalar

$$< x, y >_a = a_1 x_1 y_1 + \cdots + a_n x_n y_n,$$

unde $a = \{a_1, ..., a_n\}$ este un sistem de numere reale strict pozitive fixat, numit ***pondere***. #n particular, pentru $a = \{1, ..., 1\}$ se ob\ine spa\iul euclidian real.

Prin analogie, spa\iul euclidian ponderat complex este $\mathbf{C}^n$, cu produsul scalar

$$< x, y >_a = a_1 x_1 \overline{y}_1 + \cdots + a_n x_n \overline{y}_n,$$

unde de asemenea $a_k \in \mathbf{R}_+^*$ pentru to\i $k \in \{1, ..., n\}$.

2^o ***Spa\iul*** $C_{\mathbf{R}}^0([a,b]^*)$ al func\iilor ***continue pe por\iuni***, pe segmentul $[a,b]$, este format din func\ii $f:[a,b] \to \mathbf{R}$, continui pe $[a,b]$ cu excep\ia unui num[r finit de puncte, @n care exist[totu]i limitele laterale finite (adic[discontinuit[\ile sunt de prima spe\[). Fix`nd o func\ie a din acest spa\iu, strict pozitiv[, numit[**pondere**, definim produsul scalar prin:

$$< f, g >_a = \int_a^b a(t) f(t) g(t) \ dt .$$

Dac[func\iile au valori complexe, produsul scalar are forma

$$< f, g >_a = \int_a^b a(t) f(t) \overline{g(t)} \ dt ,$$

iar spa\iul lor se noteaz[$C_{\mathbf{C}}^0([a,b]^*)$.

3^{o}. ***Spa\iul*** $C^{1}_{\mathbf{R}}([a,b]^{*})$ al func\iilor ***netede pe por\iuni*** este format din func\ii continue pe por\iuni pe $[a,b]$, pentru care @n plus exist[derivata (finit[) cu excep\ia unui num[r finit de puncte (@ntre care, desigur, intr[ ]i cele de discontinuitate); @n punctele @n care func\ia nu este derivabil[, se cere s[existe totu]i limitele laterale finite $f'(x+0)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f'(x+h)$]i $f'(x-0)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f'(x-h)$, inclusiv @n punctele *a*]i *b*. Produsul scalar se define]te ca @n exemplul 2^{o}.

3. **Observa\ii**. #n ultimele dou[exemple de mai sus se vede deja c[pentru a defini un produs scalar pe un spa\iu de func\ii trebuie s[ne asigur[m c[aceste func\ii au propriet[\i suficiente pentru a exista integrala care define]te produsul scalar.

Men\ion[m c[un rol important are]i sensul @n care consider[m integrala: noi vom lucra cu integrala @n sens Riemann, de]i o teorie mai general[se ob\ine folosind integrala Lebesgue (vezi[16],[22],etc).

#n cazul func\iilor netede pe por\iuni, existen\a integralei este asigurat[de faptul c[func\iile derivabile pe por\iuni sunt]i continue pe por\iuni; produsul a dou[func\ii de acest fel este tot o func\ie continu[pe por\iuni, deci integrabil[pe $[a,b]$.

Pentru a putea utiliza diversele spa\ii de func\ii cu produs scalar trebuie s[cunoa]tem unele propriet[\i generale ale produsului scalar, ca de exemplu inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz:

4. **Teorem[(inegalitatea fundamental[)**. *Pentru orice* x, y *@ntr-un spa\iu real cu produs scalar* $(X, <\cdot,\cdot>)$ *avem*

$$< x,y >^2 \leq < x,x >< y,y >$$

cu egalitate dac[ ]i numai dac[x]i y *sunt coliniari (adic[* $y = lx$*).*

Demonstra\ie. Conform condi\iei iv), pentru orice $l \in \mathbf{R}$ avem $T(l) = < x + ly, x + ly > \geq 0$. Folosind condi\iile i)]i ii) ob\inem $< x,x > +2l < x,y > + l^2 < y,y > \geq 0$. Un trinom care nu-]i schimb[semnul are discriminantul negativ adic[

$$< x,y >^2 - < x,x > < y,y > \leq 0 .$$

Dac[$x = ly$, un calcul direct arat[c[

$$< x,y >^2 = < ly,y >^2 =$$
$$l^2 < y,y >^2 = < ly, ly >< y,y > = < x,x >< y,y >.$$

Reciproc, egalitatea are evident loc pentru $x = 0$ (sau $y = 0$), dar poate s[aib[loc]i pentru elemente nenule. #n primul caz coliniaritatea este banal[, iar @n al doilea caz putem explicita

$$< y,y > = \frac{< x,y >^2}{< x,x >}.$$

Trinomul *T*, considerat ini\ial, devine

$$T(l) = < x,x > \left[1 + l \frac{< x,y >}{< x,x >} \right]^2 .$$

Deoarece situa\ia $<x,y>=0$ se elimin[prin aceea c[ar atrage dup[sine $<x,x>=0$ sau $<y,y>=0$, rezult[c[acest trinom are o r[d[cin[(dubl[) $l_0=-<x,x><x,y>^{-1}$. Condi\ia iii) ne arat[c[$<x+l_0 y, x+l_0 y>=0$, ceeace implic[$x+l_0 y=0$, adic[*x*]i *y* sunt coliniari. ❑

5.**Observa\ie**.Men\ion[m c[inegalitatea Cauchy-Buniakowski- Schwartz este verificat[ ]i pe spa\ii liniare complexe, unde are forma

$$|<x,y>|^2 \le <x,x><y,y>.$$

Pentru demonstra\ie scriem c[$T(l)\ge 0$ pentru $l=-\dfrac{<x,y>}{<y,y>}$.

De asemenea, pentru demonstrarea coliniarit[\ii, se constat[c[dac[$<y,y>=\dfrac{|<x,y>|^2}{<x,x>}$]i $l_0=-\dfrac{<x,x>}{<y,x>}$, atunci $T(l_0)=0$.

6. **Corolar** *Dac[* $(X, <\cdot,\cdot>)$ *este un spa\iu cu produs scalar, atunci func\ionala* $\|\cdot\|: X \to \mathbf{R}_+$, *exprimat[prin formula* $\|x\|=<x,x>^{1/2}$ *este o **norm[** pe spa\iul* X .

Demonstra\ie. Trebuie s[verific[m condi\iile:

a) $\|x\|=0$ dac[ ]i numai dac[$x=0$;

b) $\|l x\|=|l|\cdot\|x\|$ pentru orice $l\in\mathbf{R}$ (sau $l\in\mathbf{C}$)]i $x\in X$;

c) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ pentru orice $x,y\in X$ (subaditivitate).

Prima proprietate rezult[din condi\ia iii) asupra produsului scalar. Proprietatea b) rezult[din condi\iile i)]i ii). Pentru subaditivitate scriem inegalitatea fundamental[sub forma (echivalent[, indiferent dac[spa\iul este real sau complex)

$$|<x,y>|\le\|x\|\,\|y\|,$$

de unde rezult[imediat (folosind]i $a \leq |a|$ pentru orice $a \in \mathbf{R}$)

$$2 < x, y > \leq 2\|x\|\,\|y\|.$$

Adun`nd @n ambii membri $< x, x > + < y, y > = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ]i restr`ng`nd, ob\inem

$$< x + y, x + y > \leq (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Aceea]i inegalitate se ob\ine]i @n spa\iile complexe \in`nd cont c[$\mathrm{Re} < x, y > \ \leq \ |< x, y >|$.

|in`nd cont de iii) r[m`ne s[extragem radicalul. ❑

O prim[utilizare a inegalit[\ii fundamentale este faptul c[pentru existen\a produsului scalar este suficient s[cerem existen\a normei elementelor, ca @n exemplele ce urmeaz[.

7. **Exemple** (continu[m lista @nceput[la punctul 2 al paragrafului numerot`nd exemplele @n consecin\[).

4^{o}. ***Spa\iul l_Γ^2 al]irurilor de p[trat sumabil***. Pe mul\imea]irurilor de forma $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (unde $x_n \in \mathbf{R}$ sau $x_n \in \mathbf{C}$, dup[cum $\Gamma = \mathbf{R}$ sau $\Gamma = \mathbf{C}$), pentru care

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^2 < \infty,$$

definim produsul scalar

$$< x, y > = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n \overline{y}_n,$$

convergen\a acestei serii fiind asigurat[de inegalitatea fundamental[.

5^{o}. ***Spa\iul $L_\Gamma^2([a,b])$ al func\iilor de p[trat sumabil*** pe un segment $[a,b]$ este format din func\ii $f:[a,b] \to \Gamma$ integrabile pe $[a,b]$, pentru care exist[(]i este finit[)

$$\int_a^b |f|^2(t)\ dt .$$

Pe acest spa\iu putem defini un produs scalar prin formula

$$< f, g >= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\ dt ,$$

convergen\a integralei fiind asigurat[de inegalitatea fundamental[.

Men\ion[m c[, riguros vorbind, elementele lui L^2 sunt clase de func\ii de p[trat integrabil, @n fiecare clas[intr`nd func\iile care difer[@ntre ele doar pe o mul\ime de m[sur[nul[. Desigur, @n defini\ia produsului scalar putea s[mai apar[o func\ie pozitiv[care s[reprezinte ponderea (vezi [13], [16], [26], etc.).

P R O B L E M E

§ I. 2.

1 Valorile $<(x_1, y_1),(x_2, y_2)>$ ale unei func\ionale $<\cdot,\cdot>: X \times X \to \mathbf{R}$, unde $X = \mathbf{R}^2$, se definesc prin:

a) $x_1x_2 + p\,y_1y_2$; d) x_1x_2;

b) $x_1y_2 + y_1x_2$; e) x_1y_2;

c) $x_1y_2 - y_1x_2$; f) $x_1x_2 - y_1y_2$.

Stabili\i care din func\ionale este un produs scalar]i identifica\i mul\imile $\Gamma_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : <(x, y),(x, y)>= r^2\},\ r > 0$.

Indica\ie. a) $<\cdot,\cdot>$ este un produs scalar]i Γ_r este o elips[.

b) Nu este produs scalar deoarece $<(1,-1),(1,-1)>=-2<0$; Γ_r este o hiperbol[. c) Nu este simetric; $\Gamma_r = \mathbf{R}^2$. d) degenerat. e) nesimetric. f) indefinit (Minkovski) ca @n cazul b; Γ_r este o hiperbol[.

2 Se consider[func\iile $f,g:[0,1]\to\mathbf{R}$, de expresii $f(x)=x$]i $g(x)=x^2$. Calcula\i $<f,g>$, $\|f\|_{L^2}$, $\|g\|_{L^2}$, $\|f\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$]i $\|g\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|g(x)|$, $\|f-g\|_{L^2}$]i $\|f-g\|_{\sup}$.

Indica\ie. $<f,g>=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$; $\|f\|_{L^2}=\sqrt{\int_0^1 x^2dx}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\|g\|_{L^2}=\sqrt{\int_0^1 x^4dx}=\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\|f\|=\|g\|=1$; $\|f-g\|_{L^2}=\frac{1}{\sqrt{30}}$; $\|f-g\|=\frac{1}{4}$.

3 Pe spa\iul $C_{\mathbf{R}}([0,1])$ consider[m produsul scalar $<f,g>=\int_0^1 f(x)g(x)dx$. Compara\i norma $\|\cdot\|_{L^2}$ cu norma $\|\cdot\|_{\sup}$]i extinde\i rezultatul la un interval $[a,b]$ oarecare.

Indica\ie. $\|f\|_{L^2}=\sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}\le\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|=\|f\|_{\sup}$.

Pentru un interval $[a,b]$ mai apare factorul (*b*-*a*) la majorarea integralei.

4 Ar[ta\i c[pentru orice compact $[a,b]\subset\mathbf{R}$ avem:

$$C^1_{\mathbf{R}}([a,b]^*)\subset C_{\mathbf{R}}([a,b])\subset L^2_{\mathbf{R}}([a,b]).$$

Indica\ie. Func\iile netede pe por\iuni sunt continui. P[tratul oric[rei func\ii continue este o func\ie continu[, deci integrabil[.

Incluziunile sunt stricte deoarece exist[func\ii continue nederivabile @n nici un punct, precum]i func\ii integrabile care nu sunt continue.

5 Unghiul a dintre doi vectori x, y @ntr-un spa\iu cu produs scalar $(X\ ,<\cdot,\cdot>)$ se define]te prin formula

$$\cos a = \frac{<x,y>}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Calcula\i unghiurile dintre func\iile $\sin 2pt$, $\cos 2pkt$, t, $sh\,wt$]i $ch\,wt$ din spa\iul $X\ = C_{\mathbf{R}}([0,1])$, dotat cu produsul scalar uzual.

Indica\ie. Unghiul @ntre $\sin 2pt$]i $\cos 2pkt$ este $\frac{p}{2}$, etc (calcul direct).

6 Ar[ta\i c[pentru orice $f \in C^1_{\mathbf{R}}([a,b]^*)$ exist[derivatele laterale @n orice punct $x \in [a,b]$:

$$f_s^{'}(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x-h) - f(x-0)}{h},$$

$$f_d^{'}(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}$$

unde $f(x \pm 0)$ sunt limitele laterale @n punctul *x*.

Indica\ie. Se aplic[teorema cre]terilor finite prelungirii lui *f* prin continuitate pe intervale de forma $[x-h, x]$, sau $[x, x+h]$.

7 Ar[ta\i c[dac[*f*]i *g* sunt integrabile Riemann pe $[a,b] \subset \mathbf{R}$, atunci]i $f \cdot g$ este integrabil[pe acest segment. Deduce\i c[$L^1_{\mathbf{R}}([a,b]) \subset L^2_{\mathbf{R}}([a,b])$.

Indica\ie. Dac[not[m $M_f = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$]i $M_g = \sup\{|g(x)| : x \in [a,b]\}$ atunci

$$\begin{aligned}|(fg)(x') - (fg)(x'')| \le |f(x') - f(x'')| M_g &+ \\ + |g(x') - g(x'')| M_f&,\end{aligned}$$

de unde se deduc inegalit[\i similare pentru sumele integrale Darboux. #n particular, dac[$f \in L^1_{\mathbf{R}}([a,b])$, rezult[c[$f \cdot f$ este integrabil[, deci $f \in L^2_{\mathbf{R}}([a,b])$. Incluziunea este strict[, dup[cum arat[exemplul

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{dac[} x \in [a,b] \bigcap \mathbf{Q} \\ -1 & \text{dac[} x \in [a,b] \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

8 Ar[ta\i c[dac[$f : [a,b] \to \mathbf{R}$ este integrabil[pe $[a,b] \subset \mathbf{R}$, atunci]i $|f|$ este,]i @n plus

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)| dx$$

Rezult[c[*f* este integrabil[dac[ ]tim c[$|f|$ este?

Indica\ie. Din inegalitatea

$$\left|\,|f(x')| - |f(x'')|\,\right| \le |f(x') - f(x'')|$$

deducem o rela\ie similar[pentru sumele Darboux:

$$S_{|f|} - s_{|f|} \le S_f - s_f \,.$$

Pentru a compara integralele, integr[m @n inegalitatea

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|.$$

Se poate ca $|f|$ s[fie integrabil[f[r[ca f s[fie, cum este exemplul din problema 7.

9 Ar[ta\i c[dac[$f:[a,b] \to \mathbf{R}$ este integrabil[pe $[a,b]$, atunci

(i) $$\int_a^b |f|(x)dx \le \sqrt{(b-a)\int_a^b f^2(x)dx}$$

(ii) $$2\int_a^b |f|(x)dx \le b - a + \int_a^b f^2(x)dx$$

Indica\ie. Rezult[c[$|f|$]i f^2 sunt integrabile. (i) se ob\ine lu`nd $g \equiv 1$ @n $|<f,g>| \le \|f\| \cdot \|g\|$. (ii) se ob\ine integr`nd @n $2|f(x)| \le 1 + f^2(x)$.

10 Fie $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ o func\ie pentru care exist[$c>0$ astfel @nc`t $|f(x)|\geq c$ pentru orice $x\in[a,b]$. Ar[ta\i c[$|f|$ este integrabil[pe $[a,b]$ dac[ ]i numai dac[f^2 este integrabil[pe acest segment.

Indica\ie. Dac[$|f|$ este integrabil[scriem $f^2=|f|\cdot|f|$. Dac[f^2 este integrabil[, din inegalitatea

$$f^2(x')-f^2(x'')=\Big[|f(x')|-|f(x'')|\Big]\Big[|f(x')|+|f(x'')|\Big]\geq$$
$$\geq 2c\Big[|f(x')|-|f(x'')|\Big]$$

deducem inegalit[\i similare @ntre sumele Darboux pentru $|f|$]i f^2.

§3. Ortogonalitate. Coeficien\i Fourier

#n acest paragraf vom ar[ta cum se poate rezolva problema de analiz[a semnalelor periodice folosind no\iunea de ortogonalitate.

1. Defini\ie. *Spunem c[dou[elemente x]i y, ale unui spa\iu cu produs scalar* $(X,<\cdot,\cdot>)$ *sunt* ***ortogonale*** *]i not[m* $x\perp y$, *dac[* $<x,y>=0$. *Spunem despre o mul\ime din* X *c[este un* ***sistem ortogonal*** *dac[oricare dou[elemente ale acestei mul\imi sunt ortogonale. Dac[toate elementele unui sistem ortogonal au norma egal[cu 1, spunem c[sistemul este* ***ortonormat***.

2. **Exemple**.

1^{o}. **Sistemul trigonometric** (al lui Fourier)

$$\mathrm{T}_{2p} = \{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots\}$$

este ortogonal @n $L^2_{\mathbf{R}}([0, 2p])$. #ntr-adev[r, avem

$$\int_0^{2p} \cos nx\, dx = 0 \,, \int_0^{2p} \sin\ mx\, dx = 0 \,, \int_0^{2p} \cos px \sin qx\, dx = 0 \,,$$

precum]i

$$\int_0^{2p} \cos px \cos qx\, dx = 0 \ \text{]i } \int_0^{2p} \sin\ px \sin qx\, dx = 0 \,,$$

pentru orice $p \neq q$. #n plus men\ion[m c[

$$\|1\|^2 = \int_0^{2p} dx = 2\boldsymbol{p}$$

$$\|\cos px\|^2 = \int_0^{2p} \cos^2 px\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2p} (1 + \cos 2px)\, dx = \boldsymbol{p}$$

$$\|\sin\ px\|^2 = \int_0^{2p} \sin^2 px\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2p} \sin\ px + \sin\ qx\, dx = \boldsymbol{p} \,,$$

deci acest sistem nu este ortonormat. Putem @ns[ob\ine un sistem ortonormat @mp[r\ind fiecare func\ie cu norma sa:

$$\frac{1}{\sqrt{2p}},\ \frac{1}{\sqrt{p}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{p}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{p}}\cos 2x\ ,\ \frac{1}{\sqrt{p}}\sin 2x,\ \ldots$$

Desigur, acest procedeu se poate aplica pentru normarea oric[rui sistem ortogonal.

Prin combina\ii ale acestor func\ii se pot ob\ine alte sisteme ortogonale, ca de exemplu cel folosit @n scrierea seriei Fourier @n form[complex[, $\{e^{ikx}; k \in \mathbf{Z}\}$ (vezi problema 3).

2^{o}. **Sistemul trigonometric generalizat**

$$\mathrm{T}_{T} = \{1,\ \cos wx,\ \sin wx,\ \cos 2wx,\ \sin 2wx, \ldots\}$$

unde $w = \frac{2p}{T}$, este ortogonal pe segmentul $[0,T]$. Normele elementelor acestui sistem sunt $\|1\|^2 = T$]i @n rest $\|\cos kwx\|^2 = T/2$, $\|\sin kwx\|^2 = T/2$, pentru to\i $k \in \mathbf{N}^*$.

Alte exemple de sisteme ortogonale de func\ii se studiaz[@n capitolul de ***func\ii speciale*** (vezi [4], [29], etc); exemplele de mai sus sunt suficiente pentru teoria seriilor Fourier (vezi problemele 4]i 5).

D[m acum c`teva propriet[\i remarcabile ale sistemelor ortogonale.

3. **Propozi\ie.** *Orice sistem ortogonal de vectori nenuli este liniar independent.*

Demonstra\ie. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemente ale unui sistem ortogonal din spa\iul $(X, <\cdot,\cdot>)$. Dac[$l_1 x_1 + \cdots + l_n x_n = 0$, f[c`nd produsul scalar cu $x_k, k = 1, \ldots, n$, g[sim $l_k < x_k, x_k > = 0$. Deoarece $< x_k, x_k > \neq 0$, rezult[$l_k = 0$ pentru to\i $k = 1, \ldots, n$. ❑

4. **Propozi\ie** (rela\ia lui Pitagora). *Dac[* $\{x_1,...,x_n\}$ *este un sistem ortogonal, atunci*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\left\|x_k\right\|^2 .$$

Demonstra\ie. Prin calcul direct ob\inem

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 =< x_1+\cdots+x_n ,\ x_1+\cdots+x_n >= \sum_{k,l=1}^{n} < x_k , x_l >,$$

unde pentru $k \neq l$ avem $< x_k, x_l >= 0$]i pentru $k = l$ avem $< x_k , x_k >= \left\|x_k\right\|^2$. ❑

#n particular, pentru sistemul trigonometric avem:

5. **Teorem[** (Expresia coeficien\ilor Fourier). *Dac[o serie trigonometric[*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge uniform pe $[0,2p]$ *c[tre o func\ie* $f:[0,2p] \to \mathbf{R}$*, atunci pentru coeficien\ii* a_n *]i* b_n *avem expresiile*

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(t)\cos nt\ dt;\ \ n = 0,1,...$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(t)\sin nt\ dt;\ \ n = 1,2,...$$

Demonstra\ie. Prin ipotez[putem scrie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

convergen\a fiind uniform[pe $[0,2p]$. Cum func\iile seriei sunt continui, rezult[c[ ]i *f* este continu[pe $[a,b]$. Integr`nd ob\inem expresia lui a_0, c[ci @n baza convergen\ei uniforme a seriei avem

$$\int_0^{2p}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_0^{2p} \cos nxdx + b_n \int_0^{2p} \sin nxdx) = 0$$

conform ortogonalit[\ii lui 1 cu celelalte func\ii ale sistemului trigonometric (exemplul 1^{o} de la punctul 2).

La fel, integr`nd dup[amplificarea cu cos *nx*]i respectiv $\sin nx$, ob\inem expresiile celorlal\i coeficien\i a_n]i b_n. ❑

6. **Observa\ii**. a) Datorit[periodicit[\ii func\iilor din seria Fourier, desigur c[ ]i *f* este o func\ie periodic[, astfel c[@n expresiile coeficien\ilor putem integra pe orice segment de lungime $2p$ (vezi propozi\ia 6. §1).

b) Perioada poate fi oarecare, nu neap[rat $2p$. Astfel, dac[seria

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nwx + b_n \sin nwx)$$

converge uniform c[tre func\ia $f:[0,T] \to \mathbf{R}$, unde $w = \frac{2p}{T}$, pentru coeficien\ii seriei avem:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n w t \; dt \quad : n = 0,1,...$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n w t \; dt \quad : n = 1,2,...$$

Pentru demonstra\ie fie c[se reia demonstra\ia teoremei 5, fie se face o schimbare de variabil[@n expresiile stabilite @n teorem[, pentru a modifica corespunz[tor limitele de integrare.

c) Dac[avem o func\ie integrabil[$f:[0,2p]\to \mathbf{R}$, despre care nu]tim dac[este sau nu suma unei serii trigonometrice, putem calcula integralele care dau coeficien\ii folosind doar condi\ia de integrabilitate. Aceast[observa\ie ne permite s[ata][m fiec[rei func\ii integrabile pe $[0,2p]$ o serie Fourier, ca @n defini\ia de mai jos.

7. **Defini\ie**. *Numim* ***coeficien\i Fourier ai func\iei*** *integrabile* $f:[0,2p]\to \mathbf{R}$*, numerele*

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(t)\cos nt \, dt; \; n = 0,1,...$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(t)\sin nt \, dt; \; n = 1,2,...$$

Seria Fourier format[cu ace]ti coeficien\i se nume]te ***seria Fourier ata]at[func\iei f***. Faptul c[o serie Fourier este ata]at[unei func\ii, *f*, se noteaz[astfel:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Pentru func\iile pare, respectiv impare, seria Fourier ata]at[se simplific[considerabil, a]a cum se vede @n propozi\ia ce urmeaz[.

8. **Propozi\ie**. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o func\ie periodic[, cu perioada* $2p$*, integrabil[pe* $[0,2p]$*. Atunci*

a) *Dac[f este par[, avem* $b_n = 0$ *pentru to\i* $n=1,2,\ldots$

b) *Dac[f este impar[, avem* $a_n = 0$ *pentru to\i* $n = 0,1,\ldots$

Demonstra\ie. Integralele care dau coeficien\ii Fourier nu se schimb[dac[integr[m pe segmentul $[-p,p]$. #n cazul a) \inem cont c[$f(t)\sin nt$ este func\ie impar[, deci

$$\int_{-p}^{p} f(t)\sin nt\, dt = \int_{-p}^{0} f(t)\sin nt\, dt + \int_{0}^{p} f(t)\sin nt\, dt = 0$$

deoarece prin schimbarea de variabil[$t = -t$ avem

$$\int_{-p}^{0} f(t)\sin nt\, dt = -\int_{0}^{p} f(\boldsymbol{t})\sin n\boldsymbol{t}\, d\boldsymbol{t}\,.$$

#n cazul b) proced[m analog, folosind faptul c[$f(t)\cos nt$ este o func\ie impar[. ❑

9. **Consecin\[**. Dac[avem o func\ie integrabil[$f:[0,l]\to\mathbf{R}$]i ne propunem s[@i ata][m o serie Fourier numai pe acest segment, putem proceda @n mai multe feluri, dintre care men\ion[m trei mai importante:

1^{o}*. prelungim direct prin periodicitate pe* $f|_{(0,l)}$ *(perioada fiind T=l)]i calcul[m coeficien\ii Fourier (@n general to\i nenuli), cu* $w = \dfrac{2p}{l}$*, (vezi figura 3.1).*

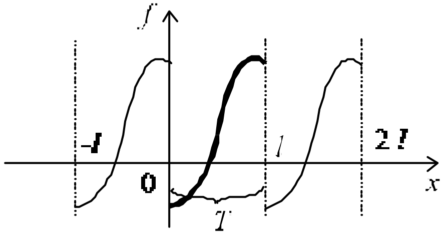


Fig. 3.1.

2^o. *Prelungim pe f pe* $[-l, l]$ *la func\ia par[*

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, l] \\ f(-x) & x \in [-l, 0), \end{cases}$$

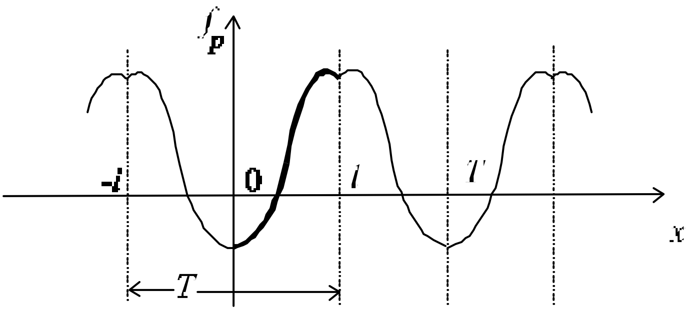


Fig. 3.2.

apoi prelungim pe f_p *prin periodicitate (T=2l)]i calcul[m coeficien\ii Fourier, cu* $w = \dfrac{p}{l}$ *(vezi figura 3.2.).*

Conform propozi\iei 8 avem $b_n = 0$ pentru to\i $n = 1, 2, \ldots$

3^o. *Prelungim func\ia* $f|_{(0,l)}$ *pe* $(-l,0)\cup(0,l)$ *la func\ia impar[*

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(0,l)\\ -f(-x) & x\in(-l,0)\end{cases}$$

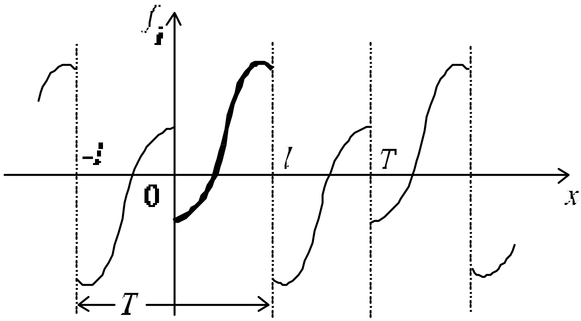


Fig. 3.3.

apoi prelungim pe f_i *prin periodicitate (T=2l)]i calcul[m coeficien\ii Fourier, cu* $w=\dfrac{p}{l}$ *(vezi figura 3.3.).*

Din nou calculul se simplific[deoarece $a_n=0$ pentru to\i $n=0,1,\ldots$Valorile @n 0]i @n $\pm l$ pentru f_i nu conteaz[@n analiza semnalului deoarece coeficien\ii Fourier sunt da\i de integrale.

Un criteriu de alegere a uneia dintre aceste serii poate fi, @n practic[, modul cum ele converg c[tre *f* pe $[0,l]$, de preferat fiind convergen\a uniform[. Av`nd @n vedere faptul c[func\iile sistemului trigonometric sunt continui]i limita unui]ir uniform convergent de func\ii continue este o func\ie continu[, rezult[c[dintre cele trei prelungiri posibile, men\ionate mai sus,]ansele maxime de asigurare a convergen\ei uniforme o au acelea care dau func\ii continue. #n acest sens este util[urm[toarea proprietate a prelungirilor pare (ce se poate intui]i pe figura 3.2.):

10. **Propozi\ie.** *Dac[* $f:[0,l]\to\mathbf{R}$ *este continu[pe* $[0,l]$*, atunci prelungirea ei periodic[par[* f^* *este continu[pe* **R** *.*

Demonstra\ie. Este suficient s[dovedim continuitatea lui f^* @n 0]i l. Pentru aceast[observ[m c[din paritatea lui f_p]i periodicitatea cu perioada *T*=2 *l* a lui f^* rezult[:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f^*(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_p(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(-x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$$

]i

$$\lim_{\substack{x\to l\\ x>l}} f^*(x) = \lim_{\substack{x\to -l\\ x>-l}} f_p(x) = \lim_{\substack{x\to l\\ x<l}} f(x) = f(l)\,. \qquad \square$$

Pentru o mai bun[@n\elegere a semnifica\iei coeficien\ilor Fourier se recurge de multe ori la o interpretare geometric[, intuitiv[:

11. **Interpretare geometric[.** Prezentarea unui semnal periodic prin graficul func\iei *f* se consider[a fi o **reprezentare @n amplitudine**. Alternativ, acela]i semnal periodic poate fi **prezentat @n frecven\[** prin sistemul de coeficien\i Fourier corespunz[tori lui *f*. #n acest sens mul\imea de coeficien\i Fourier $\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ...\}$ este numit[**spectru** al semnalului periodic *f*]i se reprezint[geometric ca @n figura 3.4.

Dac[seria Fourier este scris[@n form[complex[, putem vorbi de **spectrul complex** al semnalului *f*, format din coeficien\ii Fourier complec]i $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$. Acest spectru complex $\{c_n : n\in\mathbf{Z}\}$ se reprezint[ca @n figura 3.5. sau ca o mul\ime de numere @n planul complex **C**.

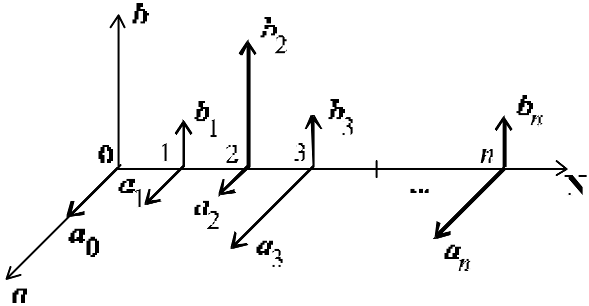


Fig. 3.4.

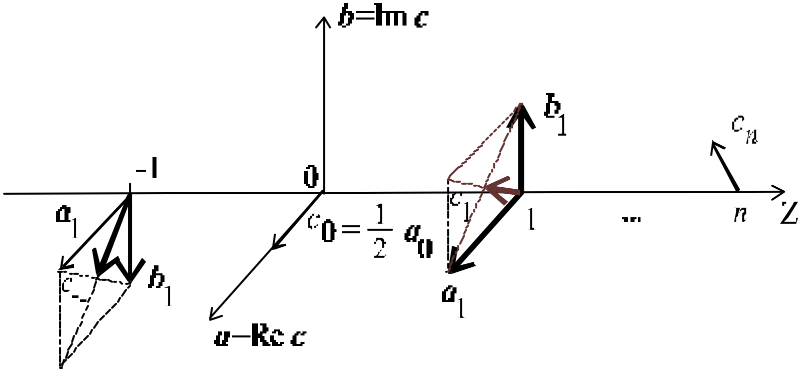


Fig. 3.5.

O alt[form[a **reprezent[rii spectrale** a semnalului *f* se ob\ine dac[nu ne intereseaz[defazajul j_n @n armonica

$$a_n \cos n w x + b_n \cos n w x = A_n \sin(n w x + j_n)$$

ci doar amplitudinea $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq 0$. #n acest caz spectrul $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ se reprezint[ca @n figura 3.6.

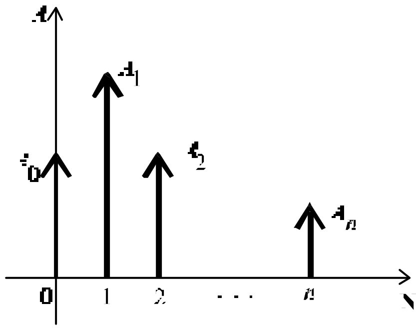


Fig. 3.6.

Vizualizarea acestor spectre reflect[unele propriet[\i ale semnalului studiat. De exemplu, la instrumentele muzicale, sunetul produs este cu at`t mai clar (limpede, pl[cut) cu c`t prima linie spectral[A_1, corespunz[toare armonicii principale, este mai mare fa\[de celelalte linii A_2, A_3, etc, corespunz[toare armonicilor superioare (care apar la octave).

12. **Concluzie.** Prin studiul de p`n[acum putem considera rezolvat[problema B_1, de calcul al coeficien\ilor Fourier, respectiv A_1, de analiz[a unui semnal periodic. R[spunsul la aceast[problem[este : "semnalului periodic *f* **@i ata][m** o serie Fourier"]i se scrie :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nwx + b_n \sin nwx).$$

Desigur, practicianul dore]te s[ ]tie dac[@n loc de ~ putem pune = , sau]i mai mult, la c`\i termeni din serie ne putem limita ca eroarea @n = s[fie acceptabil[. R[spunsuri la asemenea @ntreb[ri se pot da numai @n urma studiului convergen\ei seriilor Fourier.

PROBLEME
§ I. 3.

1 Ar[ta\i c[@n orice spa\iu cu produs scalar $(\mathcal{X}, <\cdot,\cdot>)$ avem :

a) $0 \perp x$ oricare ar fi $x \in \mathcal{X}$;

b) $x \perp x$ dac[ ]i numai dac[x=0;

c) $x \perp x_k$ pentru $k = \overline{1,n}$, atunci $x \perp (\sum_{k=1}^{n} l_k x_k)$ oricare ar fi $l_1, ..., l_n \in \Gamma$.

Indica\ie. a) $<0, x> = <y - y, x> = <y, x> - <y, x> = 0$.
b) $<x, x> = 0$ dac[ ]i numai dac[x=0.
c) $<x, \sum_{k=1}^{n} l_k x_k> = \sum_{k=1}^{n} l_k <x, x_k>$ se ob\ine prin induc\ie dup[$n \in \mathbf{N}^*$.

2 Ar[ta\i c[produsul scalar este o func\ional[continu[pe $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ @n raport cu norma generat[de el]i deduce\i c[dac[$x \perp A$]i $x \in \overline{A}$, unde $f \neq A \subseteq \mathcal{X}$, atunci x=0.

Indica\ie. Continuitatea rezult[din inegalitatea

$$\left|< x_n, y_n > - < x_0, y_0 >\right| \leq \|x_n - x_0\| \cdot \|y_n\| + \|y_n - y_0\| \cdot \|x_0\|.$$

Se consider[un]ir (x_n) @n *A*, convergent la *x*.

3 Dovedi\i ortogonalitatea sistemului

$$\mathrm{C} \;= \left\{e^{ikx} : k \in \mathbf{Z}\right\}$$

pe segmentul $[0, 2p]$.

Indica\ie. Se reduce problema la sistemul Fourier, folosind formula $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$, sau se evalueaz[direct

$$< e^{ipx}, e^{iqx} >= \int_0^{2p} e^{ipx} \overline{e^{iqx}} dx = \int_0^{2p} e^{i(p-q)x} dx$$

\in`nd cont c[(prin calcul direct, sau cu reziduuri)

$$\int_0^{2p} e^{inx} dx = \begin{cases} 2p & \text{dac[} \quad n = 0 \\ 0 & \text{dac[} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

4 Fie c o constant[real[fixat[ ]i $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ solu\iile

strict pozitive ale ecua\iei $tg\, x = cx$. Ar[ta\i c[func\iile:

$$\sin \frac{x_1 x}{l},\ \sin \frac{x_2 x}{l},\ \cdots\ \sin \frac{x_n x}{l},\ \cdots$$

formeaz[un sistem ortogonal pe segmentul $[0, l]$.

Indica\ie. Pentru $k \neq n$ se calculeaz[

$$\int_0^l \sin\frac{\xi_k x}{l}\sin\frac{\xi_n x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{l}{2}\left[\frac{1}{\xi_k - \xi_n}\sin(\xi_k - \xi_n) - \frac{1}{\xi_k + \xi_n}\sin(\xi_k + \xi_n)\right] =$$

$$= \frac{l}{2}\cos\xi_k\cos\xi_n\left[\frac{1}{\xi_k - \xi_n}(tg\xi_k - tg\xi_n) - \frac{1}{\xi_k + \xi_n}(tg\xi_k + tg\xi_n)\right] = 0$$

iar pentru norme se ob\ine

$$\int_0^l \sin^2\frac{\xi_k x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l \left(1 - \cos 2\frac{\xi_k x}{l}\right)dx = \frac{l}{2}\left[1 - \frac{c}{1 + c^2\xi_k^2}\right] > 0$$

.

5 Ar[ta\i c[sistemele de func\ii:

a) Rademacher: $\mathcal{R} = \{R_n : n \in \mathbf{N}\}$

b) Walsch: $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbf{N}\}$

sunt ortonormale pe $[0,1]$ (vezi [11], etc).

Indica\ie. a) Fix`nd $n < m$, fiecare interval $I_k$ pe care $R_n$ este constant[ se desface @n tot at`tea intervale pe care $R_m = +1$, respectiv $R_m = -1$, deci $\int_{I_k} R_n(x)R_m(x)dx = 0$. #n consecin\[$< R_n, R_m >= 0$ pentru orice $n \neq m$. Sistemul $\mathcal{R}$ este ortonormat.

b) Se evalueaz[$\int_{J_k} W_n(x)W_m(x)dx$ pe asemenea intervale J_k pe care W_n]i W_m difer[doar prin dou[func\ii Rademacher

R_k]i R_l, cu $l < k$, l]i k maximale, cu aceast[proprietate]i se folose]te ortogonalitatea sistemului R .

Deoarece $W_n^2 = 1$, rezult[$\|W_n\| = 1$.

6 Ar[ta\i c[dac[*f* este un polinom trigonometric, atunci are loc egalitatea

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nw\, x + b_n \sin nw\, x).$$

#n particular scrie\i seria Fourier ata]at[func\iilor :

a) $2 - \cos x + \sin 3x + 5 \sin 7x$

b) $\sin^3 x - 2\cos^2 x + 1$

c) $1 + \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$.

Indica\ie. Egalitatea are loc deoarece de la un rang @nainte to\i coeficien\ii sunt nuli. #n exemplul a) se identific[direct $a_0 = 4,\ a_1 = -1,\ b_1 = 0, a_2 = 0,\ b_2 = 0,\ a_3 = 0,\ b_3 = 3$]i apoi, cu excep\ia lui $b_7 = 5$, avem $a_n = b_n = 0$. #n cazul b) se trece la func\iile multiplilor de arc. c) $b_n = 0$ datorit[parit[\ii. Se evalueaz[$\int_0^{2p} \cos^k x dx$ integr`nd prin p[r\i @n $\int_0^{2p} \cos^{k-1} x \cos x dx$]i folosind o rela\ie de recuren\[.

7 Fie a_n]i b_n, $n \in \mathbf{N}$, coeficien\ii Fourier ai unei func\ii integrabile $f : [0, 2p] \to \mathbf{R}$, pentru care not[m :

$$A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Ar[ta\i c[pentru orice $n \in \mathbf{N}$]i $x \in \mathbf{R}$ avem :

$$|A_n(x)| \le \frac{1}{p} \int_0^{2p} |f(t)|\, dt \, .$$

Indica\ie. Se @nlocuiesc coeficien\ii Fourier cu expresiile lor]i se majoreaz[integrala ce exprim[pe $A_n(x)$.

8 Calcula\i coeficien\ii Fourier pentru func\iile :

a) $x - [x]$
d) x^2 pe $[-1, 2]$
b) $|x|$ pe $[-1, +1]$
e) $|\sin x|$
c) $x \sin x$ pe $[-p, p]$
f) semn $\sin x$.

Indica\ie. Se recomand[trasarea graficului]i stabilirea perioadei. Aten\ie la paritate/imparitate pentru a nu face calcule inutile.

9 Se consider[func\ia $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$ exprimat[prin

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{dac[} \quad x \in [0,1) \\ 2x - 4 & \text{dac[} \quad x \in [1,3] \end{cases}$$

a) S[se reprezinte grafic prelungirea periodic[a lui *f*, prelungirea periodic[par[ ]i cea impar[.

b) S[se scrie seriile Fourier reale]i complexe ata]ate func\iilor de la punctul a).

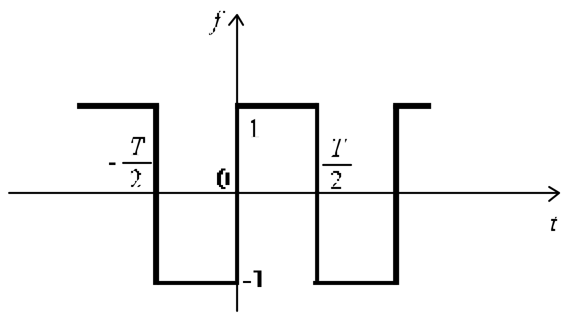
c) S[se determine 5 linii spectrale ale func\iei *f*, f_p]i f_i .

Indica\ie. Folosi\i primitive $\int x \sin nwxdx$]i $\int x \cos nwxdx$ pentru a evalua integralele ce dau coeficien\ii Fourier. Aten\ie la descompunerea acestor integrale pe intervale, respectiv la paritate/imparitate.

10 Semnalele periodice prezentate mai jos reprezint[idealizarea unor @nregistr[ri pe osciloscop. Ar[ta\i c[@n fiecare caz coeficien\ii Fourier ai acestora sunt cei men\iona\i al[turi :

a) *Unda rectangular[antisimetric[*

$a_n = 0 \ (\forall n \in \mathbf{N})$;
$b_n = 0$ dac[*n= par*
$b_n = \dfrac{4}{np}$ dac[*n= impar*

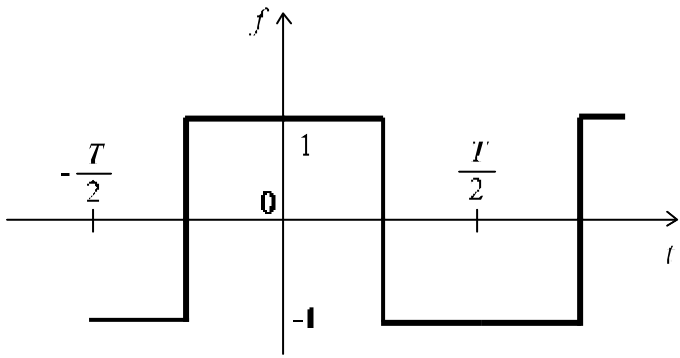


b) *Unda rectangular[simetric[*

$b_n = 0 \ (\forall n \in \mathbf{N})$;

$a_0 = 0$

$a_n = \dfrac{4}{np} \sin \dfrac{np}{2}$; *n*= 1,2,...



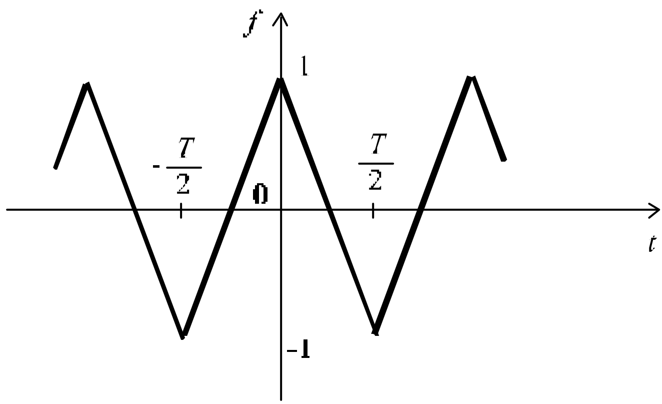
c) *Unda triunghiular[*

$b_n = 0 \;\; (\forall n \in \mathbf{N})$;

$a_n = 0$ pentru *n* - par ;

$a_n = \dfrac{8}{p^2 n^2}$ pentru n - impar

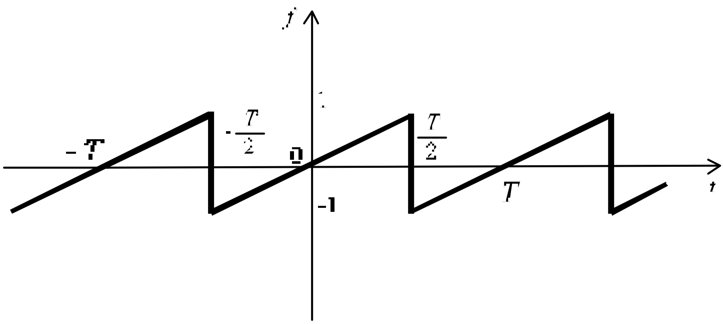
$[a_n = \dfrac{4}{p^2 n^2}(1 - \cos np)]$



d) *Unda din\i de fer[str[u*

$a_n = 0 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$;

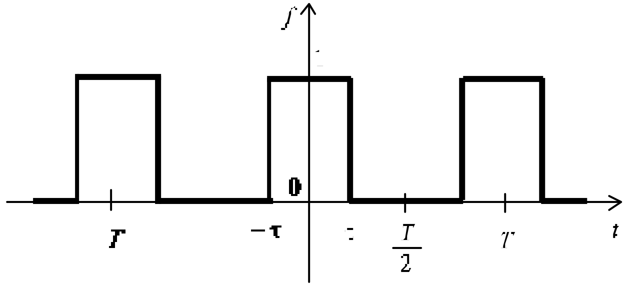
$$b_n = -\frac{2}{np}\cos np = \begin{cases} \dfrac{2}{np} & \text{pentru } n \text{ - impar} \\ -\dfrac{2}{np} & \text{pentru } n \text{ - par} \end{cases}$$



e) *Trenul de impulsuri*

$b_n = 0 \ (\forall n \in \mathbf{N})$;

$$a_0 = \frac{4t}{T}, \ a_n = \frac{2}{np}\sin\frac{2p}{T}nt$$

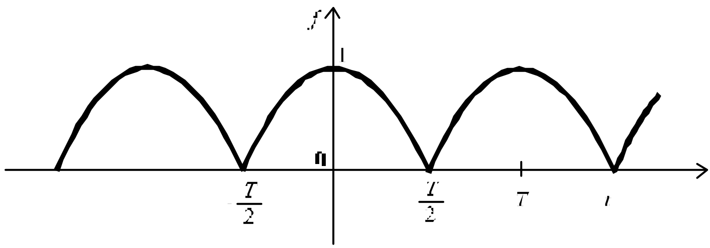


f) *Semnalul cosinusoidal redresat*

$b_n = 0 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$;

$a_0 = \dfrac{4}{p} \quad (\dfrac{1}{2}a_0$ = termenul de *curent continuu*).

$a_n = -\dfrac{(-1)^n 4}{p(2n-1)\ (2n+1)}, \ \ n \in \mathbf{N}$



Indica\ie. Se exprim[analitic func\ia ce reprezint[semnalul respectiv, de exemplu @n cazul a), $f(x) = \text{semn} \sin \dfrac{2p}{T} x$.

§4. Aproximarea @n medie p[tratic[

#n problemele practice, ca de exemplu analiza]i sinteza unui semnal periodic, nu se poate conta dec`t pe identificarea , respectiv generarea unui num[r finit de semnale fundamentale dintre cele indicate de dezvoltarea @n serie Fourier ata]at[semnalului considerat. Cu alte cuvinte, semnalul *f* este aproximat cu o sum[par\ial[a seriei Fourier ata]ate, fapt ce justific[necesitatea studiului convergen\ei (problema B2).

Deoarece cadrul cel mai natural @n care se face studiul seriilor Fourier este spa\iul $L^2_\Gamma([a,b])$, care este un spa\iu cu produs scalar, este normal ca prima abordare a problemei convergen\ei seriilor Fourier s[fie realizat[@n structura metric[specific[, generat[de propriul produs scalar. #n acest sens vom aborda urm[toarele trei probleme, pe care le consider[m mai semnificative:

Problema 1. Dac[*x* este un element @n spa\iul cu produs scalar $(\mathcal{H},<\cdot,\cdot>)$, iar $\mathcal{L}\subset\mathcal{H}$ este un subspa\iu liniar, care este cea mai bun[aproxima\ie $y\in\mathcal{L}$ a lui *x*?

Problema 2. Ce tip de eroare se minimizeaz[atunci c`nd aproximarea unei func\ii din L^2 se face cu sume par\iale ale seriei Fourier ata]ate?

Problema 3. Stabilirea unor criterii de convergen\[@n sensul structurii de spa\iu cu produs scalar.

Desigur, rezolvarea complet[a problemei convergen\ei seriilor Fourier (B2) presupune]i raportarea la alte tipuri de norme]i metrici, specifice convergen\ei punctuale]i uniforme. Un asemenea studiu se face @n paragrafele urm[toare (vezi anexa I.1.).

Solu\ionarea primei probleme formulate mai sus se bazeaz[pe no\iunea mai general[de distan\[de la un punct la o mul\ime, care poate fi considerat[pe orice spa\iu metric. #n cazul unui spa\iu cu produs scalar aceasta se particularizeaz[dup[cum arat[urm[toarea:

1. **Defini\ie**. *Fie* $(\mathcal{H}, <\cdot,\cdot>)$ *un spa\iu cu produs scalar,* $x \in \mathcal{H}$ *]i* $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ *un subspa\iu linear. Se nume]te* ***distan\[*** *de la x la* $\mathcal{L}$ *num[rul*

$$d = \inf\{\|x - y\| = \sqrt{< x - y, x - y >} : y \in \mathcal{L}\}.$$

Dac[\inem cont c[orice spa\iu normat este]i spa\iu metric, @n care distan\a dintre $x, y \in \mathcal{H}$ este

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

putem spune c[distan\a de la *x* la $\mathcal{L}$ este infimumul distan\elor de la *x* la puncte ale lui $\mathcal{L}$. Alternativ, @n termeni de aproximare, aceasta @nseamn[c[distan\a d reflect[***cea mai bun[aproximare*** @n sensul metricei *d*. Vom vedea c[@n realizarea acestei aproxim[ri este deosebit de util[rela\ia de ortogonalitate proprie spa\iului $\mathcal{H}$, dar mai @nainte trebuie s[stabilim unele rezultate ajut[toare.

2. **Lem[**. *Pentru orice* $x \in \mathcal{H}$, $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ *]i* $l \in \mathbf{C}$ *avem:*

$$\left| < x - y_1, x - y_2 > - d^2 \right|^2 \le \left[\|x - y_1\|^2 - d^2 \right] \left[\|x - y_2\|^2 - d^2 \right].$$

Demonstra\ie. S[consider[m pentru @nceput $l \ne 1$]i s[observ[m c[potrivit defini\iei lui d, avem

$$\left\| x - \frac{1}{1-l}(y_1 - l y_2) \right\| \ge d.$$

Dac[introducem nota\ia $z_1 = x - y_1,\ z_2 = x - y_2$, aceasta se scrie

$$\|z_1 - l z_2\|^2 \ge d^2 |1 - l|^2,$$

adic[, \in`nd cont de expresia normei @n H ,

$$\left[< z_1, z_1 > - \boldsymbol{d}^2 \right] - \bar{\boldsymbol{l}} \left[< z_1, z_2 > - \boldsymbol{d}^2 \right] - \boldsymbol{l} \left[< z_2, z_1 > - \boldsymbol{d}^2 \right] +$$

$$+ \ \boldsymbol{l} \bar{\boldsymbol{l}} \left[< z_2, z_2 > - \boldsymbol{d}^2 \right] \ge 0.$$

Deoarece aceast[inegalitate are loc]i @n $l = 1$, deci pentru orice $l \in \mathbf{C}$, s[@nlocuim

$$l = \frac{< z_1, z_2 > - d^2}{< z_2, z_2 > - d^2}.$$

Se ob\ine astfel (dup[schema $l = \dfrac{B}{C}$ @n $A - \bar{l} B - l \bar{B} + l \bar{l} C \ge 0$ conduce la $|B|^2 \le AC$):

$$\left| < z_1, z_2 > - d^2 \right|^2 \le \left[< z_1, z_1 > - d^2 \right] \left[< z_2, z_2 > - d^2 \right],$$

care este exact inegalitatea din enun\. ❑

3. **Lem[**. (inegalitatea Beppo-Levi). *Pentru orice* $x \in$ H *]i* $y_1, y_2 \in$ L *avem:*

$$\|y_1 - y_2\| \leq \sqrt{\|x - y_1\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - y_2\|^2 - d^2}\,.$$

Demonstra\ie. Cu nota\iile din lema precedent[avem

$$\|y_1 - y_2\|^2 = \|z_1 - z_2\|^2 = \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 - \mathbf{[}< z_1, z_2 > + < z_2, z_1 >\mathbf{]} =$$

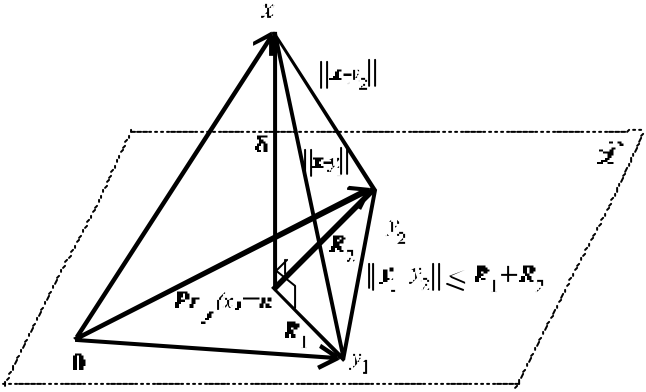
$$= \|z_1\|^2 - d^2 + \|z_2\|^2 - d^2 - 2\,\mathrm{Re}[< z_1, z_2 > - d^2]$$

unde am \inut cont c[$< z_2, z_1 > = \overline{< z_1, z_2 >}$, iar $a + \overline{a} = 2\,\mathrm{Re}\,a$.
#n continuare, deoarece $\mathrm{Re}\; a \leq |\mathrm{Re}\, a| \leq |a|$, rezult[c[

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq \|z_1\|^2 - d^2 + \|z_2\|^2 - d^2 - 2\left|< z_1, z_2 > - d^2\right|.$$

Introduc`nd aici inegalitatea stabilit[@n lema precedent[, se ob\ine inegalitatea anun\at[. ❑

Pentru a re\ine mai u]or inegalitatea Beppo-Levi, este util[interpretarea geometric[@n cazul H $= \mathbf{R}^3$, sugerat[@n figura 4.1.



$$R_1 = \sqrt{\|x - y_1\| - d^2}; \;\; R_2 = \sqrt{\|x - y_2\| - d^2}$$

Fig.4.1.

Rezultatul fundamental pentru spa\iile cu produs interior, ce va fi stabilit @n teorema ce urmeaz[, necesit[propriet[\i suplimentare ale spa\iului H din punct de vedere topologic (@n raport cu metrica d generat[de $<\cdot,\cdot>$ prin intermediul normei $\|\cdot\|$. #n acest sens preciz[m:

4. **Defini\ie**. *Spunem despre un]ir* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *din spa\iul* (H $,<\cdot,\cdot>$) *c[este **fundamental** (sau **Cauchy**) dac[pentru orice* $e>0$ *exist[* $n_0(e)\in\mathbf{N}$ *astfel @nc`t pentru orice* $n,m>n_0(e)$ *s[avem* $\|x_n - x_m\| < e$. *Dac[orice]ir fundamental este convergent, spunem c[* (H $,<\cdot,\cdot>$) *este un **spa\iu Hilbert** (sau **complet**).*

Subspa\iul L $\subset$ H este ***@nchis*** dac[pentru orice]ir convergent $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, din L , avem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \in$ L .

5. **Exemple**. (i) Spa\iile finit dimensionale $\mathbf{R}^n$, $n\in\mathbf{N}^*$, dotate cu produsul scalar euclidian sunt spa\ii Hilbert. Orice subspa\iu liniar al acestora este @nchis.

(ii) Spa\iul l^2 de]iruri $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, pentru care exist[$\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^2$, dotat cu produsul scalar

$$<(x_n)_{n\in\mathbf{N}},(y_n)_{n\in\mathbf{N}}>=\sum_{n\in\mathbf{N}} x_n \overline{y}_n$$

este un spa\iu Hilbert.

(iii) Spa\iul $L^2_\Gamma([a,b])$ dotat cu produsul scalar

$$<f,g>=\int_a^b f(t)\overline{g}(t)\,dt$$

este un spa\iu Hilbert (demonstra\ia este mai preten\ioas[ ]i poate fi g[sit[@n [13] etc).

(iv) Subspa\iul $C_\mathbf{R}([a,b])$ al lui $L^2_\mathbf{R}([a,b])$ nu este @nchis deoarece un]ir de func\ii continue poate converge @n norma lui L^2 c[tre o func\ie care nu este continu[(de exemplu @n aproximarea cu serii Fourier). Orice subspa\iu finit dimensional al acestuia este @ns[@nchis]i poate fi considerat un subspa\iu Hilbert.

(v) Spa\iul $C_\mathbf{R}([a,b])$ este complet @n norma *sup*, dar nu este un spa\iu Hilbert @n raport cu norma de spa\iu L^2 din acela]i motiv ca @n exemplul (iv).

6. **Teorem[**. (de descompunere ortogonal[). *Dac[* L *este un subspa\iu liniar @nchis al spa\iului Hilbert* $(H,<\cdot,\cdot>)$*, atunci pentru orice* $x\in H$ *exist[* $u\in L$ *]i* $v\perp L$ *@nc`t* $x=u+v$*.*

Demonstra\ie. Dac[$x\in L$, lu[m $u=x$]i $v=0$. Dac[$x\notin L$ avem $d=d(x,L)>0$ deoarece L este @nchis. Fie $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un]ir @n L astfel @nc`t $d=\lim\limits_{n\to\infty} d(x,y_n)$. Folosind inegalitatea Beppo-Levi, rezult[c[$(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un]ir fundamental. Deoarece $(H,<\cdot,\cdot>)$ este complet, exist[

$$u = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

iar deoarece L este @nchis, avem $u \in$ L , ca @n figura 4.2.

S[not[m *v*=*x*-*u*]i s[ar[t[m c[pentru orice $y \in$ L avem $v \perp y$. Pentru aceasta s[observ[m c[orice $l \in \mathbf{C}$ avem $\|x-(u-l\,y)\|^2 \geq d^2$, adic[$\|v+l\,y\|^2 \geq d^2$.

Dezvolt`nd norma, aceast[inegalitate devine

$$<v,v> + \overline{l} <v,y> + l <y,v> + l\,\overline{l} <y,y> \geq d^2.$$

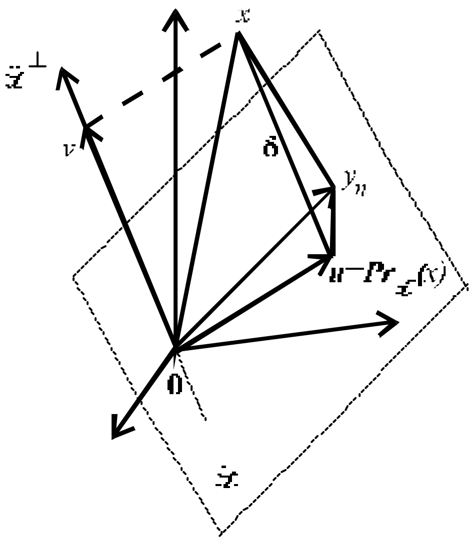


Fig.4.2.

#nlocuind aici $d = \|v\|$]i $l = -<v,y>/<y,y>$, rezult[

$$\frac{-|<v,y>|^2}{<y,y>} \geq 0,$$

adic[$<v,y>=0$ pentru orice $y \in$ L $\setminus \{0\}$. ❑

7. **Observa\ii**. (i) Elementele *u*]i *v* din teorema precedent[sunt unice. #ntr-adev[r, dac[presupunem c[$x = u' + v'$ pentru al\i $u' \in \mathcal{L}$]i $v' \perp \mathcal{L}$, rezult[$u - u' \perp v' - v$, dar]i $u - u' = v' - v$, deci @n mod necesar $u - u' = v' - v = 0$.

(ii) Descompunerea lui *x* ca @n teorema 5 poate fi extins[la $\mathcal{H}$]i prezentat[ca o ***descompunere ortogonal[*** a @ntregului spa\iu $\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^{\perp}$.

(iii) Elementul *u* se nume]te ***proiec\ie*** a lui *x* pe $\mathcal{L}$]i se noteaz[$u = \mathrm{Pr}_{\mathcal{L}}(x)$.

(iv) #n ceea ce prive]te problema 1, putem concluziona c[r[spunsul este o simpl[consecin\[a teoremei 5]i anume: cea mai bun[aproximare a unui element *x* din spa\iul Hilbert $(\mathcal{H}, <\cdot,\cdot>)$, con\inut[@n subspa\iul @nchis $\mathcal{L}$, este $u = \mathrm{Pr}_{\mathcal{L}}(x)$.

(v) Practic, determinarea lui *x* se face folosind condi\ia $(x - u) \perp \mathcal{L}$, @n special dac[$\mathcal{L}$ este finit dimensional (vezi problemele de la sf`r]itul paragrafului).

Pentru a r[spunde la problema 2, vom preciza o no\iune specific[teoriei aproxim[rii @n spa\iile $L^2_{\Gamma}([a,b])$:

8. **Defini\ie**. *Pentru* $f, g \in L^2_{\mathbf{R}}([a,b])$, *se nume]te* ***abatere medie p[tratic[*** *a func\iei g de la func\ia f num[rul:*

$$A(f,g) = \int_a^b (f - g)^2 \, dt .$$

Dac[$\Gamma = \mathbf{C}$ trebuie luat $A(f,g) = \int_a^b |f - g|^2 \, dt$.

9. **Teorem[**. *Fie* $f \in L_R^2([0,2p])$ *]i g un polinom trigonometric. Pentru ca abaterea medie p[tratic[a lui g de la f s[fie minim[este necesar]i suficient ca @n polinomul g coeficien\ii s[fie exact coeficien\ii Fourier ai func\iei f.*

Demonstra\ie. Pentru comoditatea scrierii s[not[m $g(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k j_k(t)$, unde j_k sunt func\ii din sistemul trigonometric, iar a_k sunt numere reale fixate. S[mai not[m $\int_0^{2p} j_k^2(t)dt = \|j_k\|^2$, unde, a]a cum am v[zut la @nceputul paragrafului, $\|j_k\|^2$ poate fi $2p$ (pentru func\ia unitate), sau p (pentru celelalte func\ii ale sistemului trigonometric). Pentru generalitate, putem folosi o singur[nota\ie pentru coeficien\ii Fourier ai func\iei *f*,]i anume:

$$a_k = \frac{1}{\|j_k\|^2} \int_0^{2p} f(t) j_k(t)dt, \quad k \in \mathbf{N},$$

care exist[deoarece *f* este integrabil[(@ntre func\iile j_k este]i una constant[).

Evalu[m acum abaterea medie p[tratic[:

$$A(f,g) = \int_0^{2p} [f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k j_k(t)]^2 dt = \int_0^{2p} f^2(t)dt -$$

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{2p} f(t) \cdot j_k(t)dt + \int_0^{2p} [\sum_{k=1}^{n} a_k j_k(t)]^2 dt.$$

|in`nd cont de ortogonalitatea func\iilor trigonometrice sau aplic`nd teorema lui Pitagora, ultima integral[se simplific[ ]i ob\inem:

$$A(f,g)=\int_0^{2p} f^2(t)dt-2\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k a_k\|\boldsymbol{j}_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k^2\|\boldsymbol{j}_k\|^2 .$$

Ref[c`nd un p[trat perfect din sumele de mai sus, putem scrie

$$A(f,g)=\int_0^{2p} f^2(t)dt-\sum_{k=1}^{n} a_k^2\|\boldsymbol{j}_k\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{a}_k-a_k)^2\|\boldsymbol{j}_k\|^2 .$$

Fiind dat[func\ia *f*, sunt preciza\i]i coeficien\ii a_k, deci valoarea lui *A(f,g)* depinde doar de ultima sum[. Se vede c[valoarea minim[a lui *A(f,g)* corespunde cazului c`nd aceast[sum[este nul[, adic[$a_k=a_k$ pentru to\i $k=1,...,n$.

❑

10. **Consecin\[** (Inegalitatea lui Bessel). *Dac[* a_k , $\mathrm{k}\in\mathbf{N}$ *sunt coeficien\ii Fourier ai unei func\ii* $f\in L^2_{\mathbf{R}}([0,2\boldsymbol{p}])$*, atunci*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k{}^2\|\boldsymbol{j}_k\|^2\le\int_0^{2p} f^2(t)dt .$$

Demonstra\ie. Eroarea medie p[tratic[este un num[r pozitiv, deci relu`nd ultima form[ a lui *A(f,g)* @n demonstra\ia propozi\iei precedente, ]i valoarea minim[ a lui *A(f,g),* corespunz[toare cazului c`nd $a_k = a_k$ pentru to\i $k = 0,1,\ldots,n$, este pozitiv[, adic[:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k{}^2 \|j_k\|^2 \le \int_0^{2p} f^2(t)dt\,.$$

R[m`ne s[ \inem cont c[ $n \in \mathbf{N}$ este un num[r arbitrar, iar sumele par\iale din membrul st`ng sunt toate m[rginite de integrala din membrul drept, care nu depinde de *n*, deci putem trece la limit[dup[*n*.

❑

11. **Cazuri particulare**. |in`nd cont de valorile normelor func\iilor din sistemul trigonometric T $_{2p}$, inegalitatea lui Bessel devine :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{p}\int_0^{2p} f^2(t)dt\,.$$

Dac[$f \in L^2_{\mathbf{R}}([0,T])$, ref[c`nd calculele ob\inem

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{2}{T}\int_0^{T} f^2(t)dt\,.$$

Pentru $f \in L^2_{\mathbf{C}}([0,T])$ inegalitatea se p[streaz[cu $|f|^2$ @n loc de f^2 sub integral[.

12. **Observa\ii.** (i) Se vede @n particular c[ ]irul coeficien\ilor Fourier ai oric[rei func\ii de p[trat sumabil este @n mod necesar convergent la zero.

(ii) Concluzia @n problema 2 este c[aproximarea cu polinoame trigonometrice este recomandabil[atunci c`nd se dore]te minimizarea abaterii mediei p[tratice. Pentru alte scheme de aproximare, de exemplu dac[se urm[re]te minimizarea normei "sup", sunt necesare alte tipuri de polinoame (vezi [20], [29] , etc).

(iii) Abaterea medie p[tratic[a lui *f* de la *g* este chiar p[tratul distan\ei dintre *f*]i *g* @n metrica *d*, generat[de produsul scalar $<\cdot,\cdot>$, adic[

$$A(f,g)=d^2(f,g).$$

Importan\a acestei metrici se vede]i @n rezolvarea problemei a treia, deoarece convergen\a @n sens de spa\iu L^2 @nseamn[convergen\[@n metrica *d*. Pentru a o deosebi de alte tipuri de convergen\[ea se mai nume]te]i ***convergen\[@n medie p[tratic[***.

Rezolvarea problemei 3 se face de obicei @n spa\iu Hilbert @n care exist[sisteme ortogonale de un tip particular, precizat prin urm[toarea:

13. **Defini\ie**. Spunem despre sistemul ortogonal (num[rabil) S din spa\iul Hilbert (H $,<\cdot,\cdot>$) c[este ***complet*** dac[singurul element din H , ortogonal pe toate elementele lui S , este vectorul nul. Sistemele ortogonale complete se mai numesc ***baze***.

Desigur, deoarece orice sistem ortogonal se poate norma, defini\ia aceasta se poate referi la un sistem S $=\{e_n : n\in\mathbf{N}\}$ pentru care $<e_i,e_j>=d_{ij}$ (Kronecker), @nsemn`nd c[$x\perp e_n$ pentru to\i $n\in\mathbf{N}$ implic[$x=0$.

14. **Exemple**. 1^{0}. Sistemul trigonometric T_T este complet @n spa\iul $C^1_{\mathbf{R}}([0,T])$. Mai mult, el este complet]i @n spa\iul $L^2_{\mathbf{R}}([0,T])$, demonstra\ia fiind mai anevoioas[(vezi [13], etc).

2^{0}. Sistemul Rademacher nu este complet deoarece pentru orice func\ie Walsh W_n, cu $n \neq 2^k$]i orice *m*=0,1,2,... avem (vezi [11])

$$\int_0^1 W_n(x) R_m(x) dx = 0 .$$

3^{0}. Sistemul Walsh este complet @n spa\iul $C_{\mathbf{R}}([0,1]^*)$. Demonstra\iile sunt mai preten\ioase, reduc`ndu-se la probleme de convergen\[punctual[ ]i uniform[, studiate @n paragrafele urm[toare.

Proprietatea unui sistem de a fi complet se poate exprima]i @n al\i termeni, dup[cum se vede mai jos:

15. **Teorem[**. *Fie* S *un sistem ortonormat (num[rabil) @n spa\iul Hilbert* (H $,<\cdot,\cdot>$)*. Urm[toarele condi\ii sunt echivalente :*

(i) S *este complet;*

(ii) S *este maximal (fa\[de incluziunea din* H *);*

(iii) orice element $x \in$ H *este egal cu suma seriei Fourier ata]ate (*$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ *@n sensul convergen\ei @n medie p[tratic[, unde* $e_n \in$ S *]i* $c_n = < x, e_n >$*).*

(iv) acoperirea liniar[Lin S *este dens[@n* H *, adic[* $\overline{Lin\,\mathrm{S}}$ = H *(@n sensul topologiei lui d).*

Demonstra\ie. Echivalen\ele (i)⇔(ii) , respectiv (iii)⇔(iv) sunt imediate. De asemenea, se vede u]or c[(iii)⇔(i), deoarece dac[@n $x=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ presupunem $x \perp e_n$ pentru to\i $n \in \mathbf{N}$, rezult[*x*=0, deci $\mathcal{S}$ este complet. Pentru a ar[ta c[(i)⇒(iii), fie $x \in \mathcal{H}$]i $c_n = < x, e_n >$ pentru to\i $n \in \mathbf{N}$. Deoarece $\mathcal{S}$ este ortonormat, folosind inegalitatea lui Bessel, ob\inem

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \le \|x\|^2 .$$

#n consecin\[exist[$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$, pentru care, dac[presupunem c[$y \ne x$, rezult[$< x-y, e_n >= 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Deoarece $\mathcal{S}$ este complet, rezult[*x*=*y*. ❑

R[spunsul la problema 3 este o simpl[reformulare a unei p[r\i din teorema de mai sus, pentru cazul c`nd $\mathcal{H} = C^1_{\mathbf{R}}([0,T])$:

16. **Corolar**. *Seria Fourier a oric[rei func\ii netede, periodice, este convergent[@n medie p[tratic[spre aceea]i func\ie f.*

Demonstra\ie. Sistemul trigonometric $\mathcal{T}_T$ fiind complet, afirma\ia se reduce la implica\ia (i)⇒(iii) din teorema 15. ❑

O alt[proprietate a spa\iilor Hilbert care admit baze este urm[toarea:

17. **Propozi\ie** (Egalitatea lui Parseval). *Dac[$\mathcal{S} = \{e_n, n \in \mathbf{N}\}$ este o baz[@n spa\iul Hilbert $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >)$, atunci pentru orice $x \in \mathcal{H}$, cu coeficien\ii Fourier $c_n = < x, e_n >$, avem*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2 .$$

Demonstra\ie. Conform teoremei 15 avem $x = \lim_{n\to\infty} s_n$, unde

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k e_k .$$

Un calcul direct (ca @n teorema lui Pitagora) arat[c[

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 .$$

R[m`ne s[trecem la limit[@n medie p[tratic[. ❑

#n particular avem:

18. **Corolar**. *Dac[func\ia* $f \in C^1_{\mathbf{R}}([0,T])$ *are coeficien\ii Fourier* a_n *]i* b_n, $n \in \mathbf{N}$, *fa\[de sistemul trigonometric* T_T, *atunci*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{T} \int_0^T f^2(t)dt .$$

19. **Observa\ie**. (i) Se poate ar[ta c[egalitatea Parseval este suficient[pentru completitudinea sistemului S . #n cazul mai general c`nd sistemul ortogonal complet nu este num[rabil este necesar[ @nlocuirea seriilor Fourier cu familii sumabile (vezi de exemplu [8]). Egalitatea Parseval este util[ @n evaluarea sumelor unor serii numerice (vezi problemele la sf`r]itul paragrafului).

(ii) Consecin\ele 16]i 18 sunt valabile]i pentru func\ii de p[trat integrabil, dar demonstra\iile sunt mai dificile (vezi de exemplu [13], [17]).

P R O B L E M E

§ I. 4.

1 G[si\i cea mai bun[aproxima\ie @n medie p[tratic[a func\iei $f:[0,1]\to \mathbf{R}$, $f(x)=x^3$, cu polinoame de grad cel mult 2.

Este aceast[aproxima\ie cea mai bun[ ]i @n norma "sup"? Aceea]i problem[pentru $g(x)=e^x$.

Indica\ie. Subspa\iul $L=Lin\{1,x,x^2\}$ este @nchis @n $L^2_{\mathbf{R}}([a,b])$. Se determin[$a,b,c\in \mathbf{R}$ @nc`t elementul $u(x)=f(x)-(ax^2+bx+c)$ s[fie ortogonal pe func\iile 1, x]i x^2.

2 G[si\i cea mai bun[aproxima\ie @n medie p[tratic[a func\iei $f:[0,2p]\to \mathbf{R}$, $f(x)=x$, cu polinoame trigonometrice de ordinul I. Evalua\i eroarea medie p[tratic[ ]i pe cea @n norma "sup".

Indica\ie. a_0, a_1]i b_1 @n cea mai bun[aproxima\ie @n medie p[tratic[, $\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x$, vor fi coeficien\ii Fourier ai lui *f*.

3 Se consider[ ]irul de func\ii $f_n:\mathbf{R}\to \mathbf{R}$, $n\in \mathbf{N}$,

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{dac[}\quad |x|\le n^2\\ 0 & \text{dac[}\quad |x|>n^2.\end{cases}$$

Ar[ta\i c[f_n tinde uniform la 0 pe **R**, dar nu]i @n medie p[tratic[. Este posibil[aceast[situa\ie pe un compact $[a,b]\subset \mathbf{R}$?

Indica\ie. $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)|=\dfrac{1}{n}\to 0$, @n schimb abaterea medie p[tratic[dintre f_n]i 0 este

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_n-0]^2\,dx=\int_{-n^2}^{n^2}\frac{1}{n^2}\,dx=2\,.$$

Dac[@n loc de **R** avem un segment $[a,b]$, convergen\a @n norma "sup" implic[pe cea @n medie p[tratic[deoarece

$$\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]^2dx\le(b-a)\sup_{x\in[a,b]}[f(x)-g(x)]^2\,.$$

4 Se consider[ ]irul de func\ii $f_n:[0,1]\to\mathbf{R},\ \ n=2,3,\ldots$

unde

$$f_n(x)=\begin{cases}\sqrt{nx} & \text{dac[}\quad 0\le x\le \dfrac{1}{n}\\ \sqrt{n\left(\dfrac{2}{n}-x\right)} & \text{dac[}\quad \dfrac{1}{n}\le x\le \dfrac{2}{n}\\ 0 & \text{dac[}\quad \dfrac{2}{n}\le x\le 1.\end{cases}$$

Ar[ta\i c[$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ punctual, dar nu]i uniform. Este acest]ir convergent @n medie p[tratic[?

Indica\ie. Pentru orice]ir $x\in(0,1]$ exist[un $n_0\in\mathbf{N}$ astfel @nc`t pentru orice $n>n_0$ s[avem $\dfrac{2}{n}\le x$, deci $f_n(x)=0$. Convergen\a nu este uniform[deoarece $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-0\right|=1$ pentru to\i $n\ge 2$. Convergen\a @n medie p[tratic[rezult[din

$$\int_0^1 [f_n(x)-0]^2 dx=\frac{1}{n}\to 0\,.$$

5 Not[m $f(x)=e^{\cos x}\cdot\cos(\sin x)$]i $g(x)=e^{\cos x}\sin(\sin x)$. Ar[ta\i c[$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n!}$]i $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n!}$ @n sensul convergen\ei uniforme pe **R**. Cu ce eroare se ob\in valorile integralelor $\int_0^{2p} f^2(x)dx$]i $\int_0^{2p} g^2(x)dx$ dac[@n formula lui Parseval se re\in primii trei termeni?

Indica\ie. #n seria $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ se @nlocuie]te $z = e^{ix}$, convergen\a fiind uniform[dup[$x \in \mathbf{R}$. Se aproximeaz[$\int_0^{2p} f^{\,2}(x)dt \cong \boldsymbol{p}[2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2!}\right)^2]$.

6 S[se dezvolte @n serie Fourier func\ia $f:[0,2p] \to \mathbf{R}$, unde $f(x) = \frac{1}{2}[p - x]$]i s[se deduc[suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Indica\ie. $a_n = 0$ pentru to\i n=0,1,... iar $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, apoi se aplic[egalitatea lui Parseval]i se ob\ine

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\boldsymbol{p}} \int_0^{2p} [\boldsymbol{p} - x]^2 dx = \frac{\boldsymbol{p}^2}{6}.$$

7 Fie $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o func\ie neted[ ]i periodic[, cu perioada $2p$, pentru care not[m coeficien\ii Fourier cu $a_n(f)$]i respectiv $b_n(f)$, n=0,1,... Ar[ta\i c[:

(i) $a_n(f') = nb_n(f)$]i $b_n(f') = -na_n(f)$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

(ii) $|a_n(f)| + |b_n(f)| \le \frac{1}{2}\left[a_n(f')\right]^2 + \frac{1}{2}\left[b_n(f')\right]^2 + \frac{1}{n^2}$.

(iii) Seriile numerice $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)$]i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(f)$ sunt absolut convergente.

Indica\ie. (i) Se integreaz[prin p[r\i @n expresiile coeficien\ilor Fourier pentru f'.

(ii) Din $\left(|a_n(f')| - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 0$ rezult[c[

$$\frac{2}{n}|a_n(f')| \leq |a_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2}.$$

(iii) Se aplic[inegalitatea lui Bessel func\iei f', apoi se folose]te criteriul de compara\ie.

8 S[se dezvolte func\ia $f(x) = sign \sin x$ @n serie Fourier

]i s[se deduc[sumele seriilor

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{p^2}{8} \quad \text{]i} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{p^2}{6}.$$

Indica\ie. Seria Fourier ata]at[lui *f* este

$$\frac{-4}{\sqrt{p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x.$$

Se aplic[egalitatea lui Parseval]i se deduce prima sum[. Pentru a doua sum[observ[m c[$S_2 = \frac{1}{4} S_2 + S_1$.

§5. Lemele fundamentale

Rezultatele ce vor fi stabilite @n acest paragraf ofer[c`teva instrumente de demonstra\ie a criteriilor de convergen\[punctual[a seriilor Fourier, care vor fi studiate ulterior. Fiind vorba de propriet[\i calitative, vom considera $T = 2p$.

1. **Lem[** (Integrala lui Dirichlet). *Sumele par\iale ale seriei Fourier ata]ate func\iei* $f:[0,2p] \to \mathbf{R}$, *integrabile pe* $[0,2p]$, *au expresia*

$$s_n(f,x) = \frac{1}{2p}\int_0^p [f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt \qquad (1)$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$ *(numit[* ***integrala Dirichlet****).*

Demonstra\ie. #nlocuind coeficien\ii Fourier @n suma par\ial[ob\inem (prin schimbarea ordinei dintre $\sum$]i $\int$):

$$s_n(f,x) = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(u)du +$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2p} f(u)[\cos ku\cos kx + \sin ku\sin kx]du =$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^{2p} f(u)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)]du\ .$$

Pentru calculul sumei de sub integral[exist[mai multe metode; de exemplu s[consider[m sumele auxiliare

$$s_n = 1 + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt$$
$$s_n = \quad \sin t + \sin 2t + \cdots + \sin nt.$$

Not`nd $z = \cos t + i \sin t = e^{it}$, se vede c[ $s_n + i s_n = 1 + z + \cdots + z^n = \dfrac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \dfrac{\cos(n+1)t - 1 + i \sin(n+1)t}{\cos t - 1 + i \sin t}$. Deoarece $s_n$ este partea real[ a acestei expresii, amplific[m mai @nt`i cu conjugata numitorului]i ob\inem

$$s_n = \frac{\cos nt - \cos(n+1)t + (1 - \cos t)}{2(1 - \cos t)} = \frac{1}{2} + \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{2(1 - \cos t)}.$$

|in`nd cont de formulele $\cos a - \cos b = -2 \sin \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{a-b}{2}$]i $2 \sin^2 \dfrac{t}{2} = 1 - \cos t$, rezult[

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

#n suma care ne intereseaz[avem $t = u - x$, deci

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u - x)}{\sin \frac{1}{2}(u - x)} du .$$

Revenind sub integral[la variabila $t = u - x$]i \in`nd cont de propozi\ia 6, §1, privind modificarea intervalului de integrare, rezult[:

$$s_n(f,x) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt\,. \qquad (2)$$

Aceast[integral[se descompune @ntr-o sum[de integrale de acela]i tip

$$s_n(f,x) = \frac{1}{2p}\int_{0}^{p} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt +$$

$$+\frac{1}{2p}\int_{-p}^{0} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt\,,$$

astfel c[formula din enun\ se ob\ine f[c`nd @n ultima integral[schimbarea de variabil[$t = -v$. ❑

2. **Defini\ie**. *Func\ia* $D_n : \mathbf{R} \setminus \{2kp : k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$*, care apare @n integrala lui Dirichlet, exprimat[prin*

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2p\sin\frac{t}{2}}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

se nume]te ***nucleul lui Dirichlet***

Men\ion[m c`teva propriet[\i ale nucleului lui Dirichlet:

3. **Propozi\ie**. *Func\ia* D_n *este par[, periodic[, cu perioada* $2p$*, local integrabil[(@n sens impropriu), iar*

$$\int_0^{2p} D_n(t)dt = 1 \qquad (3)$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

Demonstra\ie. Paritatea]i periodicitatea se verific[folosind direct expresia lui D_n. Integrala este improprie deoarece numitorul se anuleaz[@n punctele $2kp,\ k \in \mathbf{Z}$. Ea este totu]i convergent[(deci func\ia D_n este local integrabil[, a]a cum reiese din formula

$$s_n(f,x) = \int_{-p}^{p} f(x+t)D_n(t)dt \qquad (2')$$

stabilit[@n demonstra\ia lemei 1. #ntr-adev[r, datorit[periodicit[\ii func\iei de integrat, integrala se poate lua @ntre limitele 0]i $2p$, iar dac[$f(x) \equiv 1$, avem]i $s_n(f,x) \equiv 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. ❑

4. **Observa\ii**. 1^0. Trecerea la limit[c`nd $n \to \infty$ nu este posibil[@n formulele (1) sau (2) deoarece integralele respective sunt improprii,]i nici nu exist[limita func\iei de integrat (respectiv nu exist[$\lim\limits_{n\to\infty} D_n(t)$).

2^0. Nucleul lui Dirichlet permite scrierea sumelor par\iale din formulele (1)]i (2) ca ni]te **produse de convolu\ie**. (vezi [4],[9], etc.). Alte deosebiri formale fa\[de unele tratate constau @n scrierea nucleului lui Dirichlet, sau a condi\iei de normare (3).

Astfel, dac[@n formula (1) (sau (2)) vrem s[evit[m multiplul semi@ntreg de sub sinus, facem schimbarea de variabil[$t = 2s$]i ob\inem:

$$s_n(f,x) = \frac{1}{p}\int_0^{\frac{p}{2}} [f(x+2s) + f(x-2s)]\frac{\sin(2n+1)s}{\sin s}\,ds\ ,$$

ceea ce conduce la alte expresii pentru nucleul lui Dirichlet etc.

#n continuare vom da a doua lem[fundamental[.

5. **Lem[** (Riemann). *Pentru orice func\ie* $g:[a,b]\to \mathbf{R}$, *absolut integrabil[pe acest segment, avem*

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin pt\,dt = 0,\ \lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cos pt\,dt = 0\,.$$

Demonstra\ie. Faptul c[*g* este absolut integrabil[@nsemneaz[c[exist[$\int_a^b |g(t)|dt$ @n sens propriu sau impropriu, adic[$g \in L^1_{\mathbf{R}}([a,b])$ (vezi [16], [22], etc). Demonstra\ia o vom face @n trei etape]i doar pentru prima limit[din enun\, cealalt[trat`ndu-se @n mod asem[n[tor.

Etapa 1. Dac[$g = 1$, rezult[prin calcul direct c[

$$\left|\int_a^b \sin pt\,dt\right| = \left|\frac{1}{p}(\cos ap - \cos bp)\right| \le \frac{2}{p} \to 0\,.$$

Etapa 2. Dac[g este integrabil[@n sens propriu pe $[a,b]$, facem o diviziune d a acestui segment prin punctele $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$]i descompunem integrala

$$I_p=\int_a^b g(t)\sin\ pt\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(t)\sin\ pt\,dt\,.$$

Not[m $m_k=\inf\{g(t):t\in[t_k,t_{k+1}]\}$, $M_k=\sup\{g(t):t\in[t_k,t_{k+1}]\}$]i $w_k=M_k-m_k$ pentru $k=0,1,\ldots,n-1$ (w_k fiind ***oscila\ia*** func\iei g pe segmentul $[t_k,t_{k+1}]$). Cu aceste nota\ii putem scrie

$$I_p=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[g(t)-m_k]\sin\ pt\,dt+\sum_{k=0}^{n-1}m_k\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin\ pt\,dt\,.$$

|in`nd cont c[$g(t)-m_k\le w_k$ pentru to\i $k=0,1,\ldots,n-1$,]i folosind majorarea stabilit[@n prima etap[, evalu[m:

$$\left|I_p\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}w_k\Delta t_k+\frac{2}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\left|m_k\right|,$$

unde $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$.

Fie acum un $e>0$, arbitrar, dat. Deoarece func\ia g este integrabil[, conform criteriului general al lui Darboux, va exista o diviziune suficient de fin[d_e a segmentului $[a,b]$, @nc`t pentru toate diviziunile mai fine dec`t aceasta (s[le not[m tot d), s[avem:

$$\sum_{k=0}^{n-1}w_k\Delta t_k<\frac{e}{2}.$$

Pentru o asemenea diviziune putem calcula $M_d = \sum_{k=0}^{n-1} |m_k|$, astfel c[putem determina $p_0 \in \mathbf{R}$, @nc`t pentru $p \geq p_0$ s[avem

$$\frac{2}{p} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k| < \frac{e}{2}.$$

#n consecin\[, pentru orice $e > 0$ am determinat $p_0 \in \mathbf{R}$ @nc`t dac[$p \geq p_0$, $|I_p| < e$, adic[$\lim_{p \to \infty} I_p = 0$.

Etapa 3. S[presupunem c[*g* este integrabil[@n sens impropriu pe $[a, b]$,]i anume, pentru precizare, s[consider[m c[integrala este improprie @n *b*.

Avem deci

$$\int_a^b g(t)dt = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \int_a^{b-h} g(t)dt < \infty,$$

adic[pentru orice $e > 0$ g[sim un $h_0 > 0$ @nc`t pentru $0 < h < h_0$ s[avem

$$\int_{b-h}^{b} |g(t)| dt < \frac{e}{2}.$$

Se vede @ns[c[vom avea]i

$$\left| \int_{b-h}^{b} g(t) \sin\, pt\; dt \right| < \frac{e}{2},$$

astfel c[pentru a majora pe I_p este suficient s[determin[m $p_0 \in \mathbf{R}$ c[la etapa a 2-a, @nc`t pentru $p \geq p_0$ s[avem

$$\int_{a}^{b-h} g(t)\sin\ pt\,dt < \frac{e}{2},$$

ceea ce este posibil deoarece g este integrabil[pe $[a, b-h]$ @n sens propriu. #n concluzie, pentru orice $e > 0$ putem determina din nou $p_0 \in \mathbf{R}$ @nc`t pentru $p \geq p_0$ s[avem $\left|I_p\right| < e$.

❑

Lema lui Riemann are dou[consecin\e imediate remarcabile, precum]i o utilitate deosebit[@n studiul convergen\ei (ceea ce se va vedea mai t`rziu).

6. **Consecin\[** (privind comportarea coeficien\ilor Fourier). *Coeficien\ii Fourier ai oric[rei func\ii integrale* $f:[0,2p] \to \mathbf{R}$ *formeaz[ ]iruri convergente la zero, adic[*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{]i } \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Demonstra\ie. Coeficien\ii a_n]i b_n au forma integralelor din lema lui Riemann, cu $p = n$]i $a = 0,\ b = 2p$. ❑

Desigur, aceast[proprietate a coeficien\ilor nu este suficient[pentru convergen\a seriei Fourier.

7. **Consecin\[** (Principiul localiz[rii). *Comportarea (adic[faptul c[este convergent[sau divergent[) seriei Fourier ata]ate unei func\ii integrabile,* $f:[0,2p] \to \mathbf{R}$, *depinde doar de valorile acestei func\ii @ntr-o vecin[tate a acestui punct (oric`t de mic[ar fi aceasta).*

Demonstra\ie. Suma par\ial[dat[de (1) poate fi scris[@n forma

$$s_n(f,x)=\frac{1}{2p}\int_d^p \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\;dt+$$

$$+\int_0^d [f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)\;dt\,,$$

oricare ar fi $d\in(0,p)$. Desigur, $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}$ este integrabil[

pe $[d,p]$, deoarece *f* este integrabil[, iar numitorul nu se anuleaz[pe acest segment, deci $\dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ este continu[.

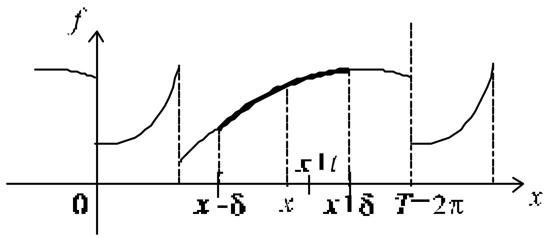


Fig. 5.1.

Aplic`nd lema lui Riemann, prima integral[poate fi neglijat[, astfel c[existen\a]i valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(f,x)$ este determinat[de existen\a]i valoarea limitei celei de a doua integrale

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^d [f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)\;dt\,.$$

Se vede @ns[c[aceast[limit[depinde de valorile lui *f* @n vecin[tatea $[x-d,\ x+d]$ a lui *x*, deoarece $t\in[0,d]$ implic[$x\pm t\in[x-d, x+d]$, ca @n figura 5.1. ❑

#n alt[formulare a principiului localiz[rii, putem spune c[dac[dou[func\ii integrabile $f, g{:}[0,2p]\to \mathbf{R}$ au valori egale @ntr-o vecin[tate a unui punct $x\in(0,2p)$, atunci seriile Fourier ata]ate lor au aceea]i comportare @n punctul *x*, iar dac[converg au aceea]i sum[, de]i @n general coeficien\ii lor Fourier difer[(depinz`nd de toate valorile func\iilor).

P R O B L E M E

§ I. 5.

1 Ar[ta\i c[pentru o func\ie integrabil[, de perioad[*T*,

formula lui Dirichlet este:

$$s_n(f,x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})wt}{\sin\frac{wt}{2}}\,dt\,.$$

Se poate evalua limita c`nd $n\to\infty$ folosind lema lui Riemann? Se poate da o formul[ aproximativ[ a lui $s_n(f,x)$ pentru cazul c`nd $T>>2n+1$?

Indica\ie. Se repet[calculele din cazul $T=2p$, sau se schimb[variabila $t=w\,u$ @n formula lui Dirichlet (dar nu @n *f*!).

Lema lui Riemann nu se poate aplica dec`t dac[$\dfrac{f(x+t)}{\sin\dfrac{wt}{2}}$ este integrabil[pe $[0,T]$, eventual @n sens impropriu @n 0. Pentru $T>>2n+1$, w este mic, dar pentru *t* @n vecin[tatea lui *T* variabilele func\iilor sin pot fi considerabil de mari, deci nu se poate conta pe o aproximare a sumei par\iale.

2 Ar[ta\i c[

$$\int_0^p \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = p\,.$$

Indica\ie. Se aplic[formula lui Dirichlet func\iei $f(x)\equiv 1$. Este posibil]i calculul direct: dup[dezvoltarea sinusului se reduce problema la

$$p = \int_0^p \sin nt \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

]i apoi

$$2p = \int_0^{2p} \frac{\sin nt}{\sin t}(1+\cos t)\,dt\,.$$

Aici se pot folosi formulele Euler, not`nd $e^{it}=z$, iar @n final se aplic[ teorema reziduurilor (reziduul @n 0 se calculeaz[ evalu`nd coeficientul lui $\dfrac{1}{z}$ direct dup[cum *n* este par sau impar).

3 Ar[ta\i c[dac[$f:[a,b]\to \mathbf{R}$ este neted[, atunci

$$\lim_{l\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(lx+j)dx=0 \text{]i}$$

$$\lim_{l\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(lx+j)dx=0 \quad .$$

R[m`ne proprietatea aceasta adev[rat[dac[*f* este neted[pe por\iuni?

Indica\ie. Se integreaz[prin p[r\i]i se \ine cont de major[ri pentru *f*]i f'. Dac[*f* este neted[pe por\iuni se descompune integrala @ntr-o sum[de integrale pe por\iunile de netezime. Formulele men\ionate se pot deduce]i aplic`nd lema lui Riemann integralelor ce rezult[prin dezvoltarea lui sin]i cos de $lx+j$.

4 Care dintre perechile de]iruri (a_n)]i (b_n) de mai jos pot reprezenta coeficien\ii Fourier ata]a\i unei func\ii integrabile (periodice)?

(i) $a_n=0,\quad b_n=1$ (iv) $a_n=\cos nj,\quad b_n=\sin nj$

(ii) $a_n=1,\quad b_n=-1$ (v) $a_n\cdot b_n=1$

(iii) $a_n=n,\quad b_n=0$ (vi) $a_n=b_n=\dfrac{1}{2^n}$

#n caz afirmativ g[si\i suma seriei Fourier ata]ate.

Indica\ie. #n exemplele (i)-(v)]irurile (a_n)]i (b_n) nu tind la zero, deci nu pot fi formate din coeficien\i Fourier ai unei func\ii integrabile.

#n cazul (vi) se @nsumeaz[separat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{2^k} \quad \text{]i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{2^k}$$

reduc`nd problema la seria geometric[complex[$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k$,

unde $z = \cos x + i \sin x$.

5 Fie a_n]i b_n, $b \quad n$, coeficien\ii Fourier ai func\iei $f:[0,2p] \to \mathbf{R}$, $f(x) = sh\ x$. Calcula\i $\boldsymbol{l} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Indica\ie. Conform lemei lui Riemann, l este o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Folosind regula l'Hospital, se g[se]te:

$$\boldsymbol{l} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{2p} sh\, t\ \sin nt\ dt}{\int_0^{2p} sh\, t\ \cos nt\ dt},$$

unde integralele se pot calcula prin p[r\i.

§6. Criterii de convergen\[punctual[

#n acest paragraf vom stabili criteriul general de convergen\[punctual[al lui Dini]i alte criterii mai particulare care rezult[din acesta, precum]i criteriul de convergen\[pentru seriile Fourier ata]ate func\iilor monotone pe por\iuni.

1. **Nota\ii**. Func\iile considerate vor fi de clas[$L^1([0,2p])$, periodice, cu perioada $2p$. Pentru fiecare $x \in [0,2p]$]i S$\in \mathbf{R}$ definim func\ia $j_{x,S}:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ prin formula

$$j_{x,S}(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] - S. \qquad (1)$$

Evident, $j_{x,S}$ este tot de clas[$L^1([0,2p])$.

2.**Criteriul lui Dini**. *Dac[exist[$h>0$ @nc`t integrala*

$$\int_0^h \frac{1}{t}\left|j_{x,S}(t)\right| dt \qquad (2)$$

s[fie convergent[, atunci seria Fourier ata]at[func\iei f este convergent[@n punctul x c[tre num[rul S.

Demonstra\ie. Conform formulei integrale a lui Dirichlet (§5) avem

$$s_n(f,x) = \frac{1}{p}\int_0^p \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt. \qquad (3)$$

Tot @n §5, formula (3), am v[zut c[nucleul lui Dirichlet are proprietatea c[

$$\int_{-p}^{p} D_n(t)dt = 1$$

]i este o func\ie par[, deci

$$\int_{0}^{p} D_n(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Avem deci :

$$\frac{1}{p}\int_{0}^{p} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt = 1. \tag{4}$$

Vom amplifica rela\ia (4) cu num[rul S]i o vom sc[dea din (3), pun`nd @n eviden\[func\ia $j_{x,S}$ introdus[prin nota\ia (1):

$$s_n(f,x) - S = \frac{1}{p}\int_{0}^{p} j_{x,S}(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{5}$$

Demonstra\ia criteriului se ob\ine prin modificarea formei formulei (5) @n a]a fel @nc`t s[se poat[folosi existen\a integralei (2), anume :

$$s_n(f,x) - S = \frac{2}{p}\int_{0}^{h}\frac{1}{t}j_{x,S}(t)\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt +$$

$$+\frac{1}{\boldsymbol{p}}\int_{h}^{p}\frac{\boldsymbol{j}_{x,S}(t)}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt\ ,$$

]i aplicarea lemei lui Riemann fiec[reia dintre integralele ob\inute.

#ntradev[r, prima integral[are limita zero c`nd $p=n+\frac{1}{2}\to\infty$, deoarece $g_1(t)=\frac{1}{t}j_{x,S}(t)\cdot\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ este integrabil[@n sens impropriu pe $[0,h]$, iar a dou[integral[are limita nul[pentru acela]i $p=n+\frac{1}{2}\to\infty$, deoarece $g_2(t)=\frac{j_{x,S}(t)}{\sin\frac{t}{2}}$ este integrabil[(@n sens propriu) pe $[h,p]$. #n concluzie $S=\lim\limits_{n\to\infty}s_n(f,x)$, adic[seria Fourier ata]at[func\iei f converge @n punctul *x* c[tre num[rul *S*. ❑

3. **Observa\ie**.1^{o}. Criteriul lui Dini prezint[o mare generalitate prin faptul c[cere o condi\ie relativ slab[: integrabilitatea lui $\frac{1}{t}j_{x,S}(t)$. De]i este foarte util din punct de vedere teoretic, @n practic[el este mai greu de aplicat deoarece @n fiecare punct ar trebui studiat[c`te o func\ie de forma (1). De aceea este util[cunoa]terea unor criterii mai particulare, dar mai u]or de aplicat.

2^{o}. #n criteriul lui Dini se vede c[@n general $S\neq f(x)$, adic[seria Fourier ata]at[func\iei *f* nu converge neap[rat c[tre *f*. Totu]i, dac[exist[$f(x+0)=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}f(x+t)$]i $f(x-0)=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}f(x-t)$, iar existen\a integralei (2) este asigurat[prin aceea c[exist[$f_s^{'}(x), f_d^{'}(x)$]i $\lim\limits_{t \to 0} j_{x,S}(t) = 0$, rezult[c[:

$$S = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0) \right], \tag{6}$$

adic[seria Fourier ata]at[func\iei *f* converge @n punctul x c[tre media aritmetic[a limitelor laterale ale lui *f* @n acest punct.

#n particular, dac[@n plus *f* este continu[@n acest punct, adic[*f(x*+0*)=f(x*-0*)=f(x)*, seria Fourier ata]at[func\iei *f* converge @n punctul *x* chiar c[tre *f(x)* , adic[*S=f(x)* .

4. **Criteriul lui Lipschitz**. *Dac[func\ia* $f \in L^1([0,2p])$*, de perioad[* $2p$*, satisface @n punctul x condi\ia lui Lipschitz, adic[exist[L>0 @nc`t pentru orice t >0 s[avem*

$$\left| f(x \pm t) - f(x) \right| \le L \cdot t, \tag{7}$$

atunci seria Fourier ata]at[func\iei f converge @n punctul x c[tre f(x).

Demonstra\ie. Pentru $S = f(x)$, formula (1) devine:

$$j_{x,S}(t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) - f(x) \right] + \frac{1}{2}\left[f(x-t) - f(x) \right],$$

deci conform (7), avem $\frac{1}{t}\left| j_{x,S}(t) \right| \le L$ pentru orice $t \in (0,p)$.

Deoarece $j_{x,S}$ este local integrabil[, rezult[c[integrala (2) exist[pentru $h = p$.

Relu`nd formula (5) sub forma

$$s_n(f,x) - f(x) = \frac{2}{p}\int_0^p \frac{1}{t} j_{x,S}(t) \frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})t\, dt$$

]i aplic`ndu-i lema lui Riemann pentru $g(t) = \frac{1}{t} j_{x,S}(t) \frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$]i

$p = n + \frac{1}{2} \to \infty$, rezult[c[$\lim\limits_{n\to\infty} s_n(f,x) = f(x)$.

❑

Ca alt[cale de demonstra\ie, puteam aplica criteriul lui Dini @n condi\iile observa\iei 3, pct. 2^o .

5.**Criteriul netezimii pe por\iuni**. *Dac[$f \in C^1([0,2p]^*)$ este periodic[, de perioad[$2p$, atunci seria sa Fourier converge @n fiecare punct $x \in \mathbf{R}$ c[tre :*

a) $S = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ (ca @n formula (6)), dac[f este discontinu[@n x ;

b) S=f(x) , dac[f este continu[@n x.

Demonstra\ie. Pentru orice punct $x \in \mathbf{R}$ sunt posibile trei situa\ii :

Cazul I. Dac[*x* este pe un interval de ***netezime*** al func\iei *f* , @n acest punct se poate aplica criteriul lui Lipschitz, deoarece, a]a cum am mai v[zut $C^1([0,2p]^*) \subset Lip([0,2p]^*)$.

Cazul II. Dac[*x* este un punct ***unghiular*** pentru *f* , aplic[m tot criteriul lui Lipschitz, deoarece inegalitatea (7) va fi verificat[, separat la st`nga]i la dreapta, cu constantele L_1]i L_2, adic[$\left|f(x+t)-f(x)\right| \le L_1 t$]i $\left|f(x-t)-f(x)\right| \le L_2 t$, deci putem lua $L=\max\{L_1, L_2\}$. #n aceste dou[cazuri avem *S*=*f*(*x*).

Cazul III. Dac[*x* este un punct de ***discontinuitate*** de prima spe\[ ]i lu[m *S* ca @n formula (6), pentru $j_{x,S}$ rezult[:

$$j_{x,S}(t)=\frac{1}{2}\left[f(x+t)-f(x+0)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x-t)-f(x-0)\right].$$

Aplic`nd teorema cre]terilor finite prelungirilor lui *f* prin continuitate la st`nga]i la dreapta lui *x* , ob\inem :

$$\begin{gathered} f(x+t)-f(x+0)=f'(c_1)t \\ f(x-t)-f(x-0)=f'(c_2)t, \end{gathered}$$

unde $c_1 \in (x, x+t)$]i $c_2 \in (x-t, x)$. Not`nd

$$L=\max\left\{\left|f'(c_1)\right|, \left|f'(c_2)\right|\right\},$$

ob\inem din nou $\frac{1}{t}\left|j_{x,S}(t)\right| \le L$, deci cum $j_{x,S}$ este local integrabil[, rezult[existen\a integralei (2).

#n concluzie, conform criteriului lui Dini, seria Fourier ata]at[func\iei *f* va converge @n punctul *x* c[tre *S* din cazul a).

❑

6. **Observa\ie**. Dintre criteriile de mai sus, cel mai u]or de aplicat @n prectic[este criteriul netezimii. Condi\ia de existen\[ ]i continuitate a derivatei *f'* este @ns[destul de restrictiv[pentru convergen\a unei serii Fourier ata]ate func\iei *f* ; se cunosc]i criterii care cer condi\ii mai slabe, ca de exemplu monotonie sau varia\ie m[rginit[. #n continuare ne vom ocupa de asemenea

criterii, dup[ce vom stabili c`teva rezultate ajut[toare, anume formula lui Bonet]i lema lui Dirichlet (vezi [13]; pentru alte c[i de ob\inere a acestor criterii vezi [17]).

7. **Lem[**. (Formula de medie a lui Bonet). *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $a<b$, *o func\ie pozitiv[ ]i cresc[toare pe* [*a*,*b*] *]i fie* $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o func\ie integrabil[@n sens propriu pe acest segment. Atunci va exista* $c\in(a,b)$ *@nc`t*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_c^b g(x)dx. \tag{8}$$

Demonstra\ie. Observ[m mai @nt`i c[integralele scrise au sens deoarece func\iile monotone sunt integrabile. S[consider[m o diviziune $\boldsymbol{d}=\{x_0=a, x_1,\ldots,x_n=b : x_0<x_1<..x_n\}$ a segmentului [*a*,*b*]]i s[scriem prima integral[din (8), sub forma

$$I=\int_a^b f(x)g(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(x)-f(x_{k+1})]g(x)dx = S_1+S_2\ ,$$

unde S_1]i S_2 sunt nota\ii pentru cele dou[sume puse @n eviden\[.

Vom ar[ta mai @nt`i c[ cea de a doua sum[ poate fi neglijat[ c`nd norma diviziunii d este suficient de mic[. #ntr-adev[r, func\ia *g* fiind integrabil[@n sens propriu pe [*a*,*b*] , va fi m[rginit[, deci exist[$L>0$ @nc`t pentru orice $x \in [a,b]$ s[avem $|g(x)| \leq L$.

Dac[mai not[m cu $w_k = f(x_{k+1}) - f(k),\ k = 0,\dots,n-1$, ***oscila\ia*** func\iei (cresc[toare!) *f* pe interval $[x_k, x_{k+1}]$, ob\inem majorarea

$$|S_2| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_{k+1})| \, |g(x)| dx \leq L \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{w}_k \ \Delta x_k ,$$

unde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ este lungimea intervalului $[x_k - x_{k+1}]$.

Aplic`nd criteriul general de integrabilitate al lui Darboux func\iei monotone *f*, rezult[ c[ pentru orice $e > 0$ putem determina un num[r $n_0 > 0$ astfel @nc`t pentru orice diviziune d cu norma $n(d) < n_0$ s[avem

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k \Delta x_k < e.$$

Pentru asemenea diviziuni vom avea $|S_2| \leq Le$.

Pentru a evalua suma S_1 s[not[m $G(x) = \int_x^b g(t) dt$, astfel c[suma S_1 s[se poat[scrie @n forma

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})[G(x_k) - G(x_{k+1})] =$$

$$= f(x_1)G(a) + \sum_{k=1}^{n-1} G(x_k)[f(x_{k+1}) - f(x_k)].$$

Se]tie @ns[c[func\ia *G* este continu[pe $[a,b]$, deci exist[$m=\inf\limits_{x\in[a,b]} G(x)$]i $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} G(x)$. Deoarece @n ultima sum[avem $f(x_{k+1})-f(x_k)\geq 0$ pentru to\i $k=1,\dots,n-1$, @nlocuind $G(x_k)$ cu *m*, respectiv cu *M*, ob\inem dubla inegalitate

$$mf(b)\leq S_1\leq Mf(b).$$

Dac[\inem cont]i de faptul c[S_2 este neglijabil[pentru diviziuni fine ale lui $[a,b]$, rezult[c[exist[$m\in[m,M]$ @nc`t s[ avem $I=mf(b)$. Pe de alt[ parte, pe baza continuit[\ii lui *G*, exist[ $c\in[a,b]$ @nc`t $m=G(c)$, deoarece m este @n mul\imea de valori ale lui *G* pe $[a,b]$. #n concluzie $I=f(b)G(c)$, ceea ce demonstreaz[rela\ia (8).

❑

8. **Lem[** (Dirichlet). *Dac[* $g:[0,h]\to\mathbf{R}$, *h*>0, *este o func\ie cresc[toare, atunci avem*

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^h g(t)\frac{\sin pt}{t}dt=\frac{p}{2}g(0+). \qquad (9)$$

Demonstra\ie. Integrala din enun\ se poate scrie sub forma

$$I=\int_0^h g(t)\frac{\sin pt}{t}dt=g(0+)\int_0^h\frac{\sin pt}{t}dt+\int_0^h[g(t)-g(0+)]\frac{\sin pt}{t}dt$$

.

Folosind substitu\ia $pt=z$ se ob\ine

$$\int_0^h\frac{\sin pt}{t}dt=\int_0^{ph}\frac{\sin z}{z}dz$$

care se]tie c[are limita $\frac{p}{2}$ c`nd $p \to \infty$. #n concluzie, pentru a ob\ine formula (9) este suficient s[ar[t[m c[

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^h [g(t)-g(0+)]\frac{\sin\ pt}{t}\,dt = 0\,.$$

Pentru aceasta consider[m un $e>0$, dat,]i pe $d>0$, care-i corespunde @n baza existen\ei limitei $g(0+)$, astfel @nc`t

$$g(t)-g(0+)<\frac{e}{2L},$$

unde $L=\sup_{t>0}\left|\int_0^t \frac{\sin\ z}{z}\,dz\right|$. (Evident $L<\infty$ deoarece integrala respectiv[este convergent[.) Putem scrie:

$$\int_0^h [g(t)-g(0+)]\frac{\sin\ pt}{t}\,dt = \int_0^d [g(t)-g(0+)]\frac{\sin\ pt}{t}\,dt +$$

$$+\int_d^h \frac{g(t)-g(0+)}{t}\sin\ pt\ dt\,,$$

unde am presupus c[$0<d<h$, ceea ce este totdeauna realizabil.

Deoarece $\frac{g(t)-g(0+)}{t}$ este o func\ie integrabil[pe $[d,h]$, conform lemei lui Riemann ob\inem

$$\lim_{p\to\infty}\int_d^h \frac{g(t)-g(0+)}{t}\sin\ pt\ dt = 0\,.$$

Pentru integrala pe $[0,d]$ vom aplica lema anterioar[(formula lui Bonet), deoarece $g(t)-g(0+)$ este pozitiv[ ]i cresc[toare, iar $\dfrac{\sin pt}{t}$ este integrabil[pe $[0,d]$ @n sens propriu, 0 fiind o singularitate aparent[a acestei func\ii; ob\inem astfel:

$$\int_0^d [g(t)-g(0+)\frac{\sin\ pt}{t}dt = [g(d)-g(0+)]\int_c^d \frac{\sin\ pt}{t}dt\ ,$$

unde $c \in [0,d]$. Dac[\inem cont c[$g(d)-g(0+) < \dfrac{e}{2L}$]i $\left|\int_c^d \frac{\sin\ pt}{t}dt\right| = \left|\int_0^d \frac{\sin\ pt}{t}dt - \int_0^c \frac{\sin\ pt}{t}dt\right| \leq 2L$, rezult[c[

$$\left|\int_0^d [g(t)-g(0+)]\frac{\sin\ pt}{t}dt\right| < e\,. \qquad \square$$

9. **Criteriul Dirichlet-Jordan**. *Fie* $f \in L^1([0,2p])$, *periodic[, de perioad[* $2p$, *]i* $x \in \mathbf{R}$. *Dac[exist[* $h > 0$ *@nc`t f s[fie cu varia\ie m[rginit[pe intervalul* $[x-h, x+h]$, *atunci seria Fourier ata]at[func\iei f converge @n punctul x c[tre* $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ *(]i deci c[tre f(x) dac[f este continu[@n x).*

Demonstra\ie. S[consider[m formula lui Dirichlet (3) pentru sumele par\iale ale seriei Fourier ata]ate lui *f* @n punctul *x*, pe care o descompunem folosind num[rul *h*>0 din ipotez[:

$$s_n(f,x) = \frac{1}{p}\int_0^p \frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^h [f(x+t)+f(x-t)] \frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})}{t} dt +$$

$$+ \frac{1}{2p}\int_h^p \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})t\, dt .$$

Dac[\inem cont de lema lui Riemann, este clar c[ultima integral[poate fi neglijat[c`nd $n \to \infty$, deci comportarea lui $s_n(f,x)$ este determinat[de penultima integral[. #n aceast[integral[func\ia $f(x+t)+f(x-t)$ este cu varia\ie m[rginit[pe segmentul $[0,h]$, iar func\ia $\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ este cresc[toare (chiar pe $[0,p]$, dar putem presupune $h<p$). #n consecin\[func\ia

$$g(t) = [f(x+t)+f(x-t)]\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

este cu varia\ie m[rginit[pe $[0,h]$. Conform teoremei lui Jordan (vezi $[13]$,etc), putem scrie $g = g_1 - g_2$, unde g_1]i g_2 sunt pozitive]i cresc[toare. Avem deci:

$$\frac{1}{p}\int_0^h [f(x+t)+f(x-t)] \frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^h g_1(t)\frac{\sin\ pt}{t}dt - \frac{1}{p}\int_0^h g_2(t)\frac{\sin\ pt}{t}dt,$$

unde am notat $p = n + \frac{1}{2}$. Aplic`nd ultimelor dou[integrale lema lui Dirichlet, aceast[aceast[expresie este egal[cu

$$\frac{1}{p}\frac{p}{2}g_1(0+) - \frac{1}{p}\frac{p}{2}g_2(0+) = \frac{1}{2}g(0+).$$

R[m`ne s[\inem cont de expresia lui *g*.

❑

10. **Observa\ie**. Condi\ia de m[rginire a varia\iei, care apare @n criteriul anterior, este relativ greu de verificat @n general; ea se verific[totu]i u]or c`nd func\ia prezint[ monotonie pe intervale, @n particular func\iile monotone av`nd varia\ie m[rginit[. Pe baza acestui fapt se poate formula un criteriu ceva mai restr`ns dec`t cel anterior dar mai u]or de utilizat.

11. **Criteriul monotoniei** (Dirichlet). *Fie* $f \in L^1([0,2p])$ *o func\ie periodic[, cu perioada* $2p$*, monoton[pe un interval* $(a,b) \subset \mathbf{R}$. *Atunci pentru orice* $x \in (a,b)$*, seria Fourier ata]at[func\iei f converge c[tre* $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$*, respectiv c[tre f(x), dac[f este continu[@n x.*

Demonstra\ie. Dac[$x \in (a,b)$, va exista $h > 0$ @nc`t pe intervalul $[x-h, x+h]$ func\ia s[fie monoton[, deci cu varia\ie m[rginit[. Aplic[m criteriul Dirichlet-Jordan. ❑

P R O B L E M E

§ I. 6.

1 Se consider[func\ia $f:(-p,p)\to \mathbf{R}$; $f(x)=sign\ x$.

S[se dezvolte *f* @n serie Fourier]i s[se deduc[suma seriei lui Leibniz.

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Indica\ie. Avem $a_n=0$ pentru to\i $n\in\mathbf{N}$]i $b_n=0$ pentru to\i indicii pari, deci

$$sign\,x\sim\frac{4}{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$$

#n punctul $x=\frac{p}{2}$ are loc egalitatea]i se ob\ine suma seriei lui Leibniz $L=\frac{p}{4}$.

2 Se consider[func\ia $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x|$]i se cere:

a) S[se scrie seria Fourier ata]at[;

b) S[se studieze convergen\a seriei respective @n punctul $x=1$;

c) S[se deduc[sumele urm[toarelor serii:

$$s=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\ \text{]i}\ S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{(4k+1)^2(4k+3)^2}.$$

Indica\ie. a) *f* este par[, iar seria Fourier ata]at[este

$$|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{p^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos p(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

b) Convergen\a @n *x*=1 rezult[din criteriul lui Lipschitz.

c) Pentru *x*=1 se g[se]te $s = \frac{p^2}{8}$, iar pentru $x = \frac{1}{4}$ ob\inem $S = \frac{p^2}{32\sqrt{2}}$.

3 Se consider[func\ia $f:[0,p] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin x$. S[se arate c[are loc egalitatea

$$f(x) = \frac{p}{2} \sin x - \frac{16}{p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(4m^2-1)^2} \sin 2mx$$

pentru orice $x \in [0,p]$.Ce serie numeric[se ob\ine c`nd $x = \frac{p}{4}$? Dar c`nd $x = \frac{p}{2}$?

Indica\ie. Se prelunge]te *f* prin imparitate]i se aplic[criteriul netezimii pe por\iuni. Pentru $x = \frac{p}{4}$]i *m=2p+1* avem $\sin 2mx = (-1)^p$ deci se ob\ine o serie alternat[. Pentru $x = \frac{p}{2}$ to\i termenii seriei se anuleaz[.

4 Se consider[func\ia $f:[0,1]\to \mathbf{R}$, de valori $f(x)=x^2$.

Se cere:

a) S[se dezvolte *f* @n serie de cosinusuri;

b) S[se studieze convergen\a seriei respective;

c) S[se g[seasc[sumele $S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}$]i $s=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Indica\ie. Prelungirea par[$f_p:(-1,+1)\to \mathbf{R}$, $f_p(x)=x^2$, are prelungirea periodic[continu[pe **R**. Conform criteriului de netezime pe por\iuni, avem

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{p^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kpx=\begin{cases} f(x) & x\in[0,1) \\ 1 & x=1 \end{cases}.$$

Pentru $x=\frac{1}{2}$ g[sim $S=\frac{p^2}{12}$, iar pentru $x=1$ rezult[$s=\frac{p^2}{6}$.

5 Func\ia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este periodic[, de perioad[$2p$, iar pe intervalul $(0,2p)$ are valorile $\frac{1}{2}(p-x)$. C[tre cine converge seria Fourier ata]at[acestei func\ii? Studia\i @n particular suma seriei @n $x=\frac{p}{2}$.

Indica\ie. Suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ este

$$s(x)=\begin{cases} f(x) & \text{dac[} \quad x\in(2kp,2(k+1)p),k\in\mathbf{Z} \\ 0 & \text{dac[} \quad x=2kp,k\in\mathbf{Z}, \end{cases}$$

indiferent de valorile $f(2k\pi)$, conform criteriului netezimii pe porţiuni. Pentru $x=\dfrac{\pi}{2}$ obţinem $\sum\limits_{p=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^p}{2p+1}=\dfrac{\pi}{4}$, după notaţia $n=2p+1$.

6 Arătaţi că pentru orice $x\in(0,2\pi)$ şi $a\neq 0$ avem:

$$\pi e^{ax}=(e^{2a\pi}-1)\left(\frac{1}{2a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\cos kx-k\sin kx}{k^2+a^2}\right).$$

În particular deduceţi convergenţa şi valoarea sumei $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2+a^2}$.

Indicaţie. Se dezvoltă în serie Fourier cu perioada 2π funcţia e^{ax}, egalitatea fiind consecinţă a criteriului netezimii. Seria numerică particulară se obţine pentru $x=\pi$, şi este $\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{\pi}{sh\, a\pi}-\dfrac{1}{a}\right)$.

7 Arătaţi că pentru orice $x\in(0,2\pi)$ şi $a\notin \mathbb{Z}$ avem:

$$\pi\cos ax=\frac{\sin 2a\pi}{2a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\sin 2a\pi\cos kx+k(\cos 2a\pi-1)\sin kx}{a^2-k^2}.$$

Deduceţi apoi egalitatea:

$$\frac{ap}{\sin ap} = 1 + 2a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2}.$$

Indica\ie. Se aplic[criteriul netezimii func\iei cosax. #n particular se ia $x = p$.

8 Studia\i convergen\a seriei Fourier ata]ate func\iei $f:[-p, p] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x - p & \text{dac[} \quad x \in [-p, -\frac{p}{2}) \\ x & \text{dac[} \quad x \in [-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}] \\ -x + p & \text{dac[} \quad x \in (\frac{p}{2}, p] \end{cases}$$

]i deduce\i suma seriei numerice $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Indica\ie. Se aplic[criteriul netezimii pe por\iuni. #n calculul coeficien\ilor este util[primitiva:

$$\int x \sin nx dx = -\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx .$$

§7. Criterii de convergen\[uniform[

Pentru func\ii $f \in L^1([0,2p])$ vom studia problema convergen\ei uniforme a seriei Fourier ata]ate, pe un segment $[a,b] \subseteq [0,2p]$.

1. **Observa\ie**. #n toate criteriile de convergen\[punctual[, studiate @n paragraful anterior, s-a v[zut c[seria Fourier ata]at[func\iei *f* converge @ntr-un punct *x* c[tre *f*(*x*) numai dac[*f* este continu[@n acest punct. De exemplu, dac[$f \in C^0([0,2p]^*)$ satisface pe un interval $I = (x_0 - d, x_0 + d)$ condi\iile unuia dintre criterii (s[zicem criteriul lui Lipschitz),]i este continu[pe $I \setminus \{x_0\}$, av`nd $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$, atunci seria Fourier ata]at[ lui *f* va converge c[tre o func\ie discontinu[ pe *I*. Analiz`nd convergen\a seriilor Fourier @n vecin[tatea punctelor de discontinuitate, inclusiv fenomenul lui Gibbs (vezi [13], vol.III), se poate constata c[aceast[situa\ie este general[. Rezult[astfel c[@ntr-un interval de forma lui *I* convergen\a seriei nu poate fi uniform[, deoarece sumele par\iale ale seriei Fourier sunt de clas[C^∞. #n concluzie, problema convergen\ei uniforme se pune (cu]anse de rezolvare pozitiv[) dar pe intervale pe care func\ia este continu[, sau, cu alte cuvinte, pentru func\ii cel pu\in de clas[$C^0([0,2p]^*)$.

Vom da c`teva criterii de convergen\[uniform[a seriilor Fourier, care pot fi ob\inute din criteriile de convergen\[punctual[, prin "uniformizarea" condi\iilor ce figureaz[@n ipotez[. De]i exist[posibilitatea formul[rii criteriului general al lui Dini pentru convergen\a uniform[(vezi [13]), consider[m c[

@n practic[este mai greu de verificat integrabilitatea unei func\ii uniform @n raport cu un parametru, astfel c[ne vom ocupa doar de criteriul Lipschitz]i de alte criterii mai particulare.

2. **Criteriul lui Lipschitz**.*Dac[* $f \in Lip([0,2\pi]^*)$, *atunci seria Fourier ata]at[ei converge aproape uniform pe toate intervalele pe care este verificat[condi\ia lui Lipschitz, c[tre func\ia f.*

Demonstra\ie. Fie $I_k = (x_k, x_{k+1})$ un interval pe care func\ia *f* @ndepline]te condi\ia lui Lipschitz]i fie $K \subset I_k$ un compact arbitrar. Va exista atunci $L > 0$]i $h > 0$ @nc`t pentru orice $x \in K$]i orice $t \in [0, h]$ s[avem

$$\left| f(x \pm t) - f(x) \right| \leq L \cdot t .$$

Pentru acest *h*>0 relu[m descompunerea expresiei (5) din §6]i ob\inem:

$$s_n(f,x) - S = \frac{2}{\pi}\int_0^h \frac{1}{t}\varphi_{x,S}(t)\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_h^{\pi}\frac{\varphi_{x,S}(t)}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt .$$

Un calcul simplu ne arat[c[pentru $S = f(x)$ avem $\left|\frac{1}{t}\varphi_{n,S}(t)\right| \leq L$, oricare ar fi $x \in I_k$]i $t \in (0, h]$. Pe de alt[parte, $\varphi_{n,S}$ este m[rginit[@n sensul c[exist[$M > 0$ @nc`t pentru orice

$(x,t)\in I_k\times[h,p]$ avem $\left|j_{n,S}(t)\right|\le M$, deoarece $j_{n,S}(t)$ este continu[@n raport cu variabilele x]i t, iar $I_k\times[h,p]$ este un compact.

Aplic`nd o teorem[de medie integralelor de mai sus, ob\inem

$$s_n(f,x)-S=\frac{2}{p}m_1(x)\int_0^h\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt+$$

$$+\frac{1}{p}m_2(x)\int_h^p\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt,$$

unde $m_1(x)$ este o valoare medie a func\iei $\frac{1}{t}j_{x,S}(t)$ pe intervalul $(0,h]$, iar $m_2(x)$ este o valoare medie a func\iei $j_{x,S}$ pe intervalul $[h,p]$. |in`nd cont de major[rile ob\inute, putem evalua

$$\left|s_n(f,x)-f(x)\right|\le\frac{2L}{p}\left|\int_0^h\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt\right|+$$

$$+\frac{M}{p}\left|\int_h^p\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt\right|.$$

Caracterul uniform al convergen\ei se vede deja @n faptul c[majorarea ob\inut[este aceea]i pentru to\i $x \in K$. Folosind lema lui Riemann, dac[se d[$e > 0$, putem determina $n_0 \in \mathbf{R}$ @nc`t pentru $n > n_0$ s[major[m modulul primei integrale cu $\frac{pe}{4L}$, iar modulul celei de a doua integrale cu $\frac{pe}{2M}$. Evident, pentru $n > n_0$ vom avea

$$\mathbf{p}_K(s_n(f,\cdot) - f) < \boldsymbol{e},$$

ceea ce dovede]te convergen\a uniform[pe K a seriei Fourier ata]ate func\iei *f*. ❑

3. **Consecin\[**. *Dac[* $f \in Lip([0,2p])$ *]i* $f(0) = f(2p)$, *atunci seria Fourier ata]at[func\iei f converge uniform pe* **R** *c[tre prelungirea prin periodicitate a lui f*.

Demonstra\ie. Condi\ia lui Lipschitz se verific[pe toat[dreapta real[. Se reia demonstra\ia criteriului precedent pe intervalul $I = (-d, 2p + d)$, care con\ine compactul $K = [0,2p]$, apoi \inem cont de periodicitate.

❑

4. **Criteriul netezimii**. *Dac[* $f \in C^1([0,2p]^*)$, *atunci seria Fourier ata]at[ei converge aproape uniform pe toate intervalele de netezime, c[tre func\ia f*.

Demonstra\ie. Aplic[m criteriul lui Lipschitz de convergen\[uniform[, deoarece $C^1([0,2p]^*) \subset Lip([0,2p]^*)$.

❑

5. **Consecin\[**. *Dac[* $f \in C^1([0,2p]^*) \cap C^0([0,2p])$ *]i* $f(0) = f(2p)$, *atunci seria sa Fourier converge uniform pe* **R** *c[tre prelungirea prin periodicitate a lui f*.

Demonstra\ie. Se aplic[consecin\a 3 de mai sus, func\ia fiind lipschitzian[pe toat[dreapta real[.

❑

6. **Criteriul Dirichlet-Jordan**. *Dac[func\ia* $f \in L^1([0,2p])$ *este continu[ ]i cu varia\ie m[rginit[pe un interval* $I = (a,b)$ *m[rginit, atunci seria Fourier ata]at[func\iei f converge aproape uniform pe I c[tre f.*

Demonstra\ie. Fie *K* un compact din *I*]i $h > 0$ astfel @nc`t pentru orice $x \in K$ s[avem $(x-h, x+h) \subset I$. Folosind acest *h* vom descompune integrala lui Dirichlet pentru sumele par\iale ale seriei Fourier ata]ate func\iei *f* @n punctul $x \in K$:

$$s_n(f,x) \leq \frac{1}{p}\int_0^h [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt +$$

$$+\frac{1}{p}\int_h^p [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt = I_1(x) + I_2(x),$$

unde I_1]i I_2 sunt nota\ii pentru cele dou[integrale.

Etapa 1. Vom ar[ta c[I_2 poate fi neglijat[c`nd *n* ia valori mari. #ntr-adev[r, func\ia $g:[h,p] \to \mathbf{R}$, cu valorile de forma $g(t) = \frac{1}{2p}\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$, este descresc[toare]i pozitiv[; @n plus *f* este local integrabil[, deci putem aplica formula de medie a lui Bonet astfel:

$$\int_0^h f(x+t)g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt = g(h)\int_h^{p-d_1} f(x+t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt$$

$$\int_0^h f(x-t)g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt = g(h)\int_h^{p-d_2} f(x-t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt$$

unde $0<d_1,d_2<p-h$ (formularea este dat[de duala lemei 7, vezi [13]). Pe de alt[parte, *f* fiind local integrabil[putem scrie

$$\int_h^{p-d_1} f(x+t)\sin\ pt\,dt = \cos px\int_{x+h}^{x+p-d_1} f(u)\sin\ pu\,du -$$

$$-\sin\ px\int_{x+h}^{x+p-d_1} f(u)\cos pu\,du\ .$$

Se observ[c[mul\imea $K'=\{u\in[x+h,x+\boldsymbol{p}]:x\in K\}$ este un compact, deci exist[*a*=cel mai mic element @n K'. Dac[not[m cu $F{:}K'\to\mathbf{R}$ func\ia $F(v)=\int_a^v f(u)\sin\ pu\,du$, se vede c[*F* este continu[, chiar uniform, pe K'. (Riguros vorbind, d_1]i d_2 depind de *x*, dar aici se vede c[nu este important cum, ci doar faptul c[se g[sesc @ntre 0]i $p-h$). Deoarece

$$F^*(x)=\int_{x+h}^{x+p-d_1} f(u)\sin\ pu\,du = F(x+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d}_1)-F(x+h)$$

va fi]i ea (uniform) continu[pe *K,* va exista $x_0 \in K$ @nc`t $\left|F^*(x_0)\right| = \mathbf{p}_{K'}(F^*)$. Aplic`nd lema lui Riemann integralei $F^*(x_0)$, pentru orice $e > 0$ determin[m un rang p_1, @nc`t dac[ $p > p_1$ s[ avem $\mathbf{p}_{K'}(F^*) < e$. Proced`nd la fel cu integrala

$$\int_{x+h}^{x+p-d_1} f(u)\cos pu\, du$$

]i apoi relu`nd ra\ionamentul pentru integrala

$$\int_{h}^{p-d_2} f(x-t)\sin(n+\frac{1}{2})t\, dt\ ,$$

se constat[c[$\mathbf{p}_K(I_2)$ poate fi neglijat[, adic[ ]i $I_2(x)$ poate fi neglijat[uniform @n raport cu $x \in K$, dac[*n* este suficient de mare.

Etapa II. Vom descompune pe $I_1(x)$ @ntr-o sum[de integrale

$$I_1(x) = \frac{1}{p}\int_0^h [f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})}{t}dt +$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^h [f(x+t)+f(x-t)]\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)\sin(n+\frac{1}{2})t\, dt =$$

$$= J_1(x) + J_2(x),$$

unde J_1]i J_2 sunt de asemenea nota\ii pentru integralele scrise. #n aceast[etap[vom ar[ta c[ ]i integrala J_2 poate fi neglijat[, dac[*n* este suficient de mare. Pentru aceasta s[observ[m c[func\ia $j:(-2p,+2p) \to \mathbf{R}$, de valori

$$\boldsymbol{j}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}} - \dfrac{1}{t} & \text{dac[} t \neq 0 \\ 0 & \text{dac[} t = 0 \end{cases}$$

este analitic[pe acest interval, adic[0 nu este de fapt punct singular pentru j (sau mai exact este singularitate aparent[). #ntr-adev[r, se constat[u]or c[dezvoltarea @n serie de puteri pentru j @n jurul originii este

$$j(t) = \frac{1}{12}t + \frac{37}{5760}t^3 + \cdots.$$

Deoarece *f* este continu[pe *I*, iar $K_h = \bigcup_{x \in K}[x-h, x+h]$ este un compact, rezult[c[exist[$M > 0$ @nc`t $|f(x+t) + f(x-t)| \leq M$ pentru orice $x \in K$ ]i $t \in [0,h]$. Aplic`nd integralei J_2 teorema de medie]i apoi lema lui Riemann, ob\inem, pentru orice $e > 0$,

$$|J_2(x)| \leq \frac{M}{\boldsymbol{p}} \left| \int_0^h \boldsymbol{j}(t) \sin(n + \frac{1}{2})t\, dt \right| < \boldsymbol{e},$$

dac[n este suficient de mare. Deoarece x este arbitrar @n K, rezult[$\mathbf{p}_K(J_2) < e$, ceea ce ne-am propus.

Etapa III. Vom ar[ta c[J_1 tinde uniform c[tre f pe K. Pentru aceasta s[observ[m mai @nt`i c[deoarece f este cu varia\ie m[rginit[pe I, conform teoremei lui Jordan putem considera c[$f = f_1 - f_2$, unde f_1]i f_2 sunt cresc[toare; @n plus, f fiind continu[, f_1]i f_2 vor fi]i ele continue. Vom descompune pe J_1 @n patru integrale:

$$J_1(x) = \frac{1}{p}\int_0^h f_1(x+t)\frac{\sin\ pt}{t}dt - \frac{1}{p}\int_0^h f_2(x+t)\frac{\sin\ pt}{t}dt +$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^h f_1(x-t)\frac{\sin\ pt}{t}dt - \frac{1}{p}\int_0^h f_2(x-t)\frac{\sin\ pt}{t}dt\ .$$

Observ[m c[pentru fiecare dintre fiecare dintre aceste integrale este aplicabil[lema lui Dirichlet (pct. 8, §6), chiar uniform @n raport cu $x \in K$. Astfel, relu`nd pentru prima integral[(ca model) demonstra\ia lemei lui Dirichlet, putem scrie:

$$\frac{1}{p}\int_0^h f_1(x+t)\frac{\sin\ pt}{t}dt = \frac{1}{p}\ f_1(x)\int_0^h \frac{\sin\ pt}{t}dt +$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^h [\ f_1(x+t) - f_1(x)]\frac{\sin\ pt}{t}dt\ ,$$

sau, ceea ce este acela]i lucru:

$$-\frac{1}{2}\ f_1(x) + \frac{1}{p}\int_0^h f_1(x+t)\frac{\sin\ pt}{t}dt = \frac{1}{p}\ f_1(x)[-\frac{p}{2} + \int_0^h \frac{\sin\ pt}{t}dt\ ]+$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^h [f_1(x+t)-f_1(x)]\frac{\sin pt}{t}dt = E_1(x)+E_2(x).$$

Deoarece f_1 este continu[pe K_h, va exista $M_1>0$ @nc`t $|f_1(x)|\le M_1$ pentru orice $x\in K$. Folosind faptul c[

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^h \frac{\sin pt}{t}dt = \frac{p}{2},$$

independent de x , rezult[c[pentru $e>0$ se poate determina $p_0\in\mathbf{R}$ @nc`t pentru $p>p_0$ s[avem

$$\left|\frac{1}{p}f_1(x)\left[-\frac{p}{2}+\int_0^h\frac{\sin pt}{t}dt\right]\right|<e,$$

adic[$\mathbf{p}_K(E_1)<e$.

Deoarece f_1 este uniform continu[pe K , pentru orice $e>0$ va exista $d>0$, @nc`t dac[$t\in[0,d]$ s[avem $|f(x+t)-f(x)|<e,$ oricare ar fi $x\in K$. Descompunem pe E_2 astfel :

$$E_2(x)=\frac{1}{p}\int_0^d [f_1(x+t)-f_1(x)]\frac{\sin pt}{t}dt+$$

$$+\frac{1}{p}\int_d^h \frac{f_1(x+t)-f_1(x)}{t}\sin ptdt$$

Integralei pe $[0,d]$ @i aplic[m formula lui Bonet, iar integralei pe $[d,h]$ @i aplic[m o teorem[de medie]i apoi lema lui Riemann.

Rezult[astfel c[pentru orice $e>0$ se poate scrie $\mathbf{p}_K(E_2)<e$ dac[*p* este suficient de mare.

#n concluzie, avem

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\boldsymbol{p}}\int_0^h f_1(x+t)\frac{\sin\ pt}{t}dt=\frac{1}{2}f_1(x)$$

uniform @n raport cu $x\in K$, adic[@n seminorma $\mathbf{p}_K$.

Aplic`nd acest rezultat ]i celorlalte integrale ce intervin @n $J_1$, putem @ncheia demonstra\ia deoarece rezult[ c[ $J_1$ converge uniform c[tre *f* , c`nd $n\to\infty$, pe compactul *K*.

❑

7.**Consecin\[**. *Dac[* $f\in BV([0,2\boldsymbol{p}])\cap C^o([0,2\boldsymbol{p}])$ *]i* $f(0)=f(2p)$, *atunci seria Fourier ata]at[lui f converge uniform pe* **R** *c[tre prelungire prin periodicitate a func\iei f .*

Demonstra\ie. Din ipotez[rezult[c[prelungirea prin continuitate a lui *f* este continu[ ]i cu varia\ie m[rginit[ ]i pe un interval m[rginit ce con\ine strict pe $[0,2p]$. #n plus $f\in L^1([0,2\boldsymbol{p}])$, deci putem aplica criteriul Dirichlet - Jordan de convergen\[uniform[. ❑

8.**Criteriul monotoniei**. *Dac[* $f\in L^1([0,2\boldsymbol{p}])$ *este continu[ ]i monoton[pe por\iuni pe intervalul* $J=(a,b)$

m[rginit, atunci seria Fourier ata]at[func\iei f converge aproape uniform pe J c[tre f.

Demonstra\ie. Monotonia pe por\iuni implic[m[rginirea varia\iei lui f pe J , deci aplic[m criteriul Dirichlet-Jordan de convergen\[aproape uniform[.

❑

9.**Consecin\[**. *Dac[* $f \in C^o([0,2p])$ *este monoton[pe por\iuni]i* $f(0) = f(2p)$, *atunci seria Fourier ata]at[ei converge uniform pe* **R** *c[tre prelungirea prin periodicitate a lui f.*

Demonstra\ie. Aplic[m criteriul monotoniei pentru convergen\a aproape uniform[pe un interval J m[rginit, ce con\ine pe $[0,2p]$, ceea ce este posibil deoarece func\iile monotone pe por\iuni au varia\ie m[rginit[.

❑

P R O B L E M E

§ I. 7.

1 Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ periodic[, $T = 2p$, neted[pe por\iuni]i continu[. Ar[ta\i c[seria ei Fourier converge uniform c[tre *f* pe **R** folosind inegalitatea (stabilit[@n problema 7, §4)

$$|a_n(f)| + |b_n(f)| \le \frac{1}{2}\Big[a_n(f')^2\Big] + \frac{1}{2}\Big[b_n(f')^2\Big] + \frac{1}{n^2}.$$

Indica\ie. Aplic[m inegalitatea Bessel seriei Fourier a func\iei f']i folosim criteriul de compara\ie a seriilor.

2 S[se dezvolte @n serie Fourier func\iile

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos x} \quad \text{]i} \quad g(x) = \frac{1}{5 + 3\sin x}$$

]i s[se justifice convergen\a uniform[a acestora c[tre *f*, respectiv *g*.

Indica\ie. Coeficien\ii Fourier se calculeaz[@n combina\ia $a_n + ib_n$, pentru ca folosind formulele Euler, problema s[se reduc[la calculul unor integrale complexe cu ajutorul reziduurilor. Convergen\a este uniform[deoarece func\iile *f*]i *g* sunt derivabile, cu derivatele continui pe **R**.

3 Fie $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, periodic[, cu perioada $T = 2p$, care pe $(0,2p)$ are valorile $f(x) = \dfrac{p - x}{2}$. S[se arate c[

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

@n sensul convergen\ei aproape uniforme pe $(0,2p)$.

Indica\ie. Pentru orice $d \in (0,p)$, pe compactul $[d, 2p - d]$ putem aplica orice criteriu de convergen\[uniform[.

4 S[se scrie seriile Fourier ata]ate func\iilor

$$f(x) = \cos lx \quad]\text{i} \quad g(x) = \sin lx$$

unde $l \in \mathbf{R}$, iar $l > 0$ este lungimea intervalului de periodicitate. G[si\i rela\ia dintre l]i *l* care asigur[convergen\a uniform[a seriilor Fourier ata]ate acestor func\ii.

Indica\ie. Dac[avem valori egale @n 0]i *l* este asigurat[continuitatea. Pentru *f* rezult[$ll = 2pn$, iar pentru *g* avem $ll = pn$, unde $n \in \mathbf{Z}$.

5 Fie $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (sau **C**) o func\ie neted[pe $[0,1)$, continu[pe **R**]i periodic[, cu perioada *T*=1. Ar[ta\i c[pentru orice $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, fixat, avem

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\boldsymbol{a}) = \int_0^1 f(x)dx\ .$$

Indica\ie. Egalitatea se arat[u]or pentru func\ii de forma $f_k(x) = \exp(2pikx)$, unde $k \in \mathbf{Z}$. #ntr-adev[r, cazul *k*=0 este banal, ambii termeni fiind 1. Pentru $k \neq 0$ integrala este 0, iar suma se calculeaz[ca la progresia geometric[, not`nd $z = \exp(2pik\boldsymbol{a})$:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n\boldsymbol{a}) = z(1+z+\cdots+z^{N-1}) = z\frac{1-z^N}{1-z} =$$

$$= e^{2pika} \cdot \frac{1-e^{2pikNa}}{1-e^{2pika}}\ .$$

M[rginirea acestor sume asigur[egalitatea cu 0 a limitei din enun\. #n cazul general, *f* se aproximeaz[***uniform*** cu polinoame trigonometrice, care sunt combina\ii liniare (finite) de func\ii f_k.

6 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o func\ie continu[pe **R**, periodic[, cu perioada $2p$,]i fie $c_n = \dfrac{a_k - ib_k}{2}$ coeficien\ii Fourier complec]i ai seriei ata]ate. Ar[ta\i c[:

a) Dac[*f* este de clas[C^1, atunci exist[$M_1 > 0$ astfel @nc`t $|c_k| \le \dfrac{M_1}{k}$ oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}^*$.

b) Dac[f este de clas[C^2, atunci exist[$M_2 > 0$ astfel @nc`t $|c_k| \leq \frac{M_2}{k^2}$, oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}^*$.

c) Deduce\i un criteriu de convergen\[uniform[pentru func\iile de clas[$C^2_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$.

Indica\ie. a) Se integreaz[prin p[r\i, ca de exemplu

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2pin}\int_0^{2p} f'(x)e^{-inx}dx$$

]i se majoreaz[modulul. b) Se mai integreaz[o dat[prin p[r\i. c) Seria $\sum \frac{1}{k^2}$ este convergent[, deci este suficient s[aplic[m criteriul compara\iei.

7 Ar[ta\i c[dac[$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are perioada $T = 2p$, este derivabil[de k ori $(k \in \mathbf{N}^*)$]i satisface condi\ia Lipschitz @mpreun[cu derivatele ei, atunci are loc egalitatea

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n n^k \cos(nx + \frac{kp}{2}) + b_n n^k \sin(nx + \frac{kp}{2})\right]$$

unde coeficien\ii Fourier a_n, b_n ai lui f au expresiile

$$a_n = \frac{1}{p\, n^k}\int_0^{2p} f^{(k)}(x)\cos(nx + \frac{kp}{2})\, dx \quad]i$$

$$b_n = \frac{1}{p\, n^k} \int_0^{2p} f^{(k)}(x) \sin(nx + \frac{kp}{2})\, dx .$$

Indica\ie. Deoarece $(\cos nx)^{(k)} = n^k \cos(nx + \frac{kp}{2})$]i $(\sin nx)^{(k)} = n^k \sin(nx + \frac{kp}{2})$, egalitatea cerut[se ob\ine deriv`nd de *k* ori @n dezvoltarea @n serie Fourier a lui *f*. Prin ipotez[, aplic`nd criteriul Lipschitz, condi\iile teoremei de derivare termen cu termen @ntr-un]ir de func\ii (vezi [23], [26], etc) sunt verificate,]i anume:

a) seria Fourier a lui *f* converge (este suficient punctual) c[tre *f*;

b) termenii seriei Fourier sunt func\ii derivabile (chiar analitice);

c) seria ob\inut[prin derivarea termen cu termen este convergent[**uniform** c[tre derivata sumei.

Aceast[proprietate este folosit[uneori (vezi [27]) @n calculul coeficien\ilor Fourier atunci c`nd coeficien\ii Fourier ai lui $f^{(k)}$ sunt mai u]or de ob\inut (metoda d[rezultate]i dac[nu se verific[toate condi\iile de mai sus, teoretic necesare).

8 Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o func\ie integrabil[cu perioada

$T = 2p$]i cu coeficien\ii Fourier a_n, b_n, $n \in \mathbf{N}$. Ar[ta\i c[dac[pentru un $k \in \mathbf{N}^*$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^k(|a_n| + |b_n|)$ este convergent[, atunci *f* este de *k* ori derivabil[ ]i are loc egalitatea

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot n^k \cos(nx + \frac{kp}{2}) + b_n \cdot n^k \sin(nx + \frac{kp}{2}) \right]$$

.

Indica\ie. Convergen\a seriei numerice din ipotez[asigur[convergen\a ***uniform[*** a tuturor seriilor Fourier ob\inute prin derivare termen cu termen @n seria Fourier a lui *f*. Se ra\ioneaz[ca @n problema precedent[.

9 Func\ia $f : [0, p] \to \mathbf{R}$, de valori

$$f(x) = \begin{cases} a\,x & \text{dac[} \quad 0 < x \le \frac{p}{4} \\ -\frac{2a}{p}x^2 + 2ax - \frac{ap}{8} & \text{dac[} \quad \frac{p}{4} < x \le \frac{3p}{4} \\ -a(x - p) & \text{dac[} \quad \frac{3p}{4} < x \le p \end{cases}$$

unde $a > 0$ este fixat, se prelunge]te impar]i apoi prin periodicitate ($T = 2p$).

a) Trasa\i graficul lui *f*]i a primelor trei derivate.

b) Aproxima\i func\ia *f* cu o sinusoid[folosind formulele stabilite @n problema 7 (dup[[27]).

Indica\ie. a) f' este liniar[pe por\iuni, f'' este constant[pe acelea]i por\iuni, iar $f'''(x) = [-d_{p/4}(x) + d_{3p/4}(x)]\frac{4a}{p}$ pentru $x \in [0, p]$, unde d reprezint[func\ia impuls Dirac.

b) Aproximarea se realizeaz[scriind $f(x) \cong b_1 \sin x$, unde $b_1 = \frac{2}{p}\int_0^p f^{(k)}(x)\sin(x + \frac{kp}{2})dx$. Se ob\ine $b_1 = \frac{8a\sqrt{2}}{p^2}$, cea mai convenabil[fiind formula pentru k=3, c`nd:

$$b_1 = \frac{2}{p}\cdot\frac{4a}{p}\left[-d_{p/4}(\cos) + d_{3p/4}(\cos)\right] = \frac{8a}{p^2}(\cos\frac{p}{4} - \cos\frac{3p}{4}).$$

Considera\iile asupra lui b_1 nu sunt condi\ionate de convergen\a seriei Fourier derivate (vezi problema 7).

ANEXA I.1. : **Convergen\a @n spa\ii de func\ii**

Vom selecta c`teva no\iuni ]i rezultate teoretice privind convergen\a @n spa\ii de func\ii, adapt`ndu-le la cazul seriilor Fourier. Pentru @nceput reamintim principalele tipuri de convergen\[pentru]iruri]i serii de func\ii reale, pe care apoi le caracteriz[m cu seminorme specifice.

1. **Defini\ie**. *Fie* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un]ir de func\ii* $f_n : D \to \mathbf{R}$*, unde* $D \subseteq \mathbf{R}$*. Spunem c[ ]irul* (f_n) ***converge @n punctul*** $x \in D$ *dac[ ]irul numeric* $(f_n(x))$ *converge. Mul\imea* $C \subseteq D$ *a tuturor punctelor @n care* (f_n) *converge se nume]te* ***mul\ime de convergen\[*** *a]irului* (f_n)*, respectiv* (f_n) *se zice convergent punctual pe C.*

Func\ia $j : C \to \mathbf{R}$, definit[@n fiecare punct $x \in C$ prin $j(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, se nume]te ***limita punctual[*** a]irului (f_n)]i se noteaz[

$$j \overset{p}{\underset{C}{=}} \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Aceast[construc\ie se poate sintetiza prin:

2. **Propozi\ie**. *}irul (f_n) converge punctual pe C c[tre j dac[ ]i numai dac[pentru orice $x \in C$]i $e > 0$ exist[$n_0(x,e) \in \mathbf{N}$ astfel @nc`t pentru orice $n > n_0(x,e)$ s[avem $\left| f_n(x) - j(x) \right| < e$.*

Dac[rangul n_0 de aici este satisf[c[tor pentru toate punctele x se ob\ine o condi\ie mai restrictiv[:

3. **Defini\ie.** *Spunem c[ ]irul (f_n) **converge uniform** c[tre $j \overset{p}{\underset{C}{=}} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pe o mul\ime $E \subseteq C$ dac[pentru orice $e > 0$ exist[$n_0(e) \in \mathbf{N}$ astfel @nc`t pentru orice $x \in E$]i $n > n_0(e)$ avem $\left| f_n(x) - j(x) \right| < e$. #n acest caz not[m*

$$j \overset{u}{\underset{E}{=}} \lim_{n\to\infty} f_n .$$

*Spunem c[ ]irul (f_n) converge **aproape uniform** c[tre j pe o mul\ime $H \subseteq C$ dac[el converge uniform pe orice compact $K \subseteq H$]i not[m*

$$j \overset{a.u.}{\underset{H}{=}} \lim_{n\to\infty} f_n .$$

Reamintim rela\ia dintre aceste tipuri de convergen\[.

4. **Propozi\ie**. *Convergen\a uniform[implic[pe cea aproape uniform[, iar aceasta implic[(presupune) convergen\a punctual[(pe orice mul\ime $M \subseteq C$).*

5. **Observa\ie**. Una din problemele importante @n practic[este transmiterea unor propriet[\i, ca de exemplu continuitatea, derivabilitatea, integrabilitatea, de la termenii]irului la func\ia limit[. #n acest sens nu este suficient[convergen\a punctual[,

fapt ce justific[interesul @n convergen\ele mai tari - uniform[ ]i aproape uniform[(vezi [23], [26], etc).

De asemenea, recomand[m ca util[reamintirea unor criterii de de convergen\[a seriilor de func\ii]i a teoriei seriilor de puteri, cu care seriile Fourier au leg[tur[.

Consider[m iar[]i important de eviden\iat c[aceste tipuri de convergen\[, precum]i altele, utile @n analiza Fourier, sunt convergen\e topologice, chiar mai mult, pot fi descrise @n termeni de norme]i semi-norme.

6. **Propozi\ie**. *Fie* $\mathcal{X}$ *un spa\iu liniar de func\ii reale* $f : X \to \mathbf{R}$ *]i* $x \in X$ *. Atunci*

a) *func\ionala* $p_x : \mathcal{X} \to \mathbf{R}^+$*, exprimat[prin formula*

$$p_x(f) = |f(x)|$$

este o semi-norm[pe $\mathcal{X}$ *(numit[* ***seminorm[punctual[****).*

b) *o condi\ie necesar[ ]i suficient[ca un]ir de func\ii* $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $f_n \in \mathcal{X}$ *s[fie convergent @n punctul* $x \in X$ *c[tre* $j(x)$ *este ca el s[fie convergent @n raport cu seminorma* p_x*.*

c) *o condi\ie necesar[ ]i suficient[ca]irul de func\ii* $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *s[fie convergent punctual pe mul\imea* $C \subseteq X$ *c[tre func\ia* $j \in \mathcal{X}$ *este ca el s[fie convergent c[tre* j *@n raport cu familia de seminorme* $\mathcal{P} = \{p_x : x \in C\}$*.*

Demonstra\ie. a) p_x este o semi-norm[deoarece verific[condi\iile

i) $p_x(lf) = |l| p_x(f)$ pentru orice $f \in \mathcal{X}$]i $l \in \mathbf{R}$;

ii) $p_x(f+g) \le p_x(f) + p_x(g)$, oricare ar fi $f, g \in \mathcal{X}$.

#n consecin\[p_x determin[o semi-metric[ ]i o topologie (uniform[) pe X .

b) Condi\ia de convergen\[punctual[din defini\ia 2 se poate reformula astfel: pentru orice $e > 0$ exist[un $n_0(e) \in \mathbf{N}$ (*x* este fixat) astfel @nc`t $p_x(f_n - j) < e$, care este exact condi\ia de convergen\[@n seminorma p_x.

c) Reformul[m condi\ia de convergen\[punctual[pe o mul\ime $C \subseteq X$, dat[@n defini\ia 2, astfel:]irul $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $f_n \in$X converge punctual pe *C* c[tre $j \in$X dac[pentru orice $p_x \in$P]i $e > 0$ exist[un rang $n_0(x,e) \in \mathbf{N}$ @nc`t pentru $n > n_0(x,e)$ s[avem $p_x(f_n - j) < e$.

❑

7. **Propozi\ie**. *Fie* M *spa\iul (liniar) al func\iilor* $f : T \to \mathbf{R}$, *m[rginite pe mul\imea nevid[T. Atunci*

a) *func\ionala* $\|\cdot\|$:M $\to \mathbf{R}^+$, *exprimat[prin formula*

$$\|f\| = \sup_{x\in T} |f(x)|$$

este o norm[pe acest spa\iu (numit[***norma "sup"****);*

b) *o condi\ie necesar[ ]i suficient[ca un]ir* $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $f_n \in$ M *s[fie uniform convergent este ca el s[fie convergent @n norma "*sup*".*

Demonstra\ie. a) Se verific[u]or condi\iile i)]i ii) din propozi\ia precedent[ ]i @n plus

iii) $\|f\| = 0$ dac[ ]i numai dac[*f* = 0.

b) Condi\ia de convergen\[uniform[enun\at[@n defini\ia 2 se reformuleaz[astfel :]irul $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $f_n \in$ M este uniform convergent c[tre func\ia $j \in$ M dac[pentru orice $e > 0$ exist[

un rang $n_0(e) \in \mathbf{N}$ astfel @nc`t pentru to\i $n > n_0(e)$ s[avem $\| f_n - j \| < e$.

8. **Observa\ie**. Se vede c[pentru definirea unor norme (seminorme, etc.) pe spa\ii de func\ii sunt necesare unele propriet[\i ale acestor func\ii, iar @n acela] timp, o anume norm[poate fi considerat[pe mai multe spa\ii de func\ii dac[acestea au valori reale (sau complexe, sau, mai general, @ntr-un spa\iu normat, vezi [8], [16], [31], etc.); norma "sup" poate fi definit[numai dac[@n plus func\iile sunt m[rginite; convergen\a **aproape uniform[** poate fi]i ea descris[prin seminorme, dar atunci spa\iul pe care sunt definite func\iile trebuie s[fie spa\iu topologic, pentru ca fiec[rui compact $K \subseteq \mathbf{C}$ s[@i putem ata]a o seminorm[p_K :X $\to \mathbf{R}^+$ prin formula $p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Toate aceste norme]i seminorme pot fi definite pe spa\iile func\iilor netede pe por\iuni sau continue pe por\iuni (notate $\mathbf{C}^1_{\mathbf{R}}\left([a,b]^*\right)$, respectiv $\mathbf{C}^0_{\mathbf{R}}\left([a,b]^*\right)$ @n § I.2), dar @n general nu au sens pentru func\iile integrabile, sau de p[trat integrabil (vezi exemplul 5 @n § I.2).

#n concluzie este util[o inventariere a principalelor norme]i seminorme ce intervin @n analiza Fourier, cu precizarea propriet[\ilor minimale ale func\iilor c[rora acestea se pot aplica :

9. **Lista principalelor norme**]i seminorme utilizate @n analiza Fourier.

1° . $p_x(f) = |f(x)|$ are sens dac[f are valori reale (sau complexe).

2° . $p_K(f)=\sup\limits_{x\in K}|f(x)|$ are sens dac[f are valori reale (sau complexe) este definit[pe un spa\iu topologic @n care K este compact]i este m[rginit[pe acest spa\iu (sau m[car pe K) .

3° . $\|f\|=\sup\limits_{x\in T}|f(x)|$ are sens dac[f are valori reale]i este m[rginit[pe mul\imea *T*.

4° . $\|f\|_1=\int\limits_a^b|f(t)|dt$ are sens dac[$f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este absolut integrabil[pe $[a,b]$. (#n locul segmentului $[a,b]$ se poate considera o mul\ime oarecare cu m[sur[(vezi [16], [22], etc.)).

5° . $\|f\|_2=\left(\int\limits_a^b|f|^2(t)dt\right)^{1/2}$ are sens dac[$f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este cu p[tratul integrabil pe $[a,b]$ (modulul este esen\ial dac[func\ia are valori @n $\mathbf{C}$).

#ntre aceste seminorme exist[inegalit[\i care exprim[de fapt reportul dintre diferitele tipuri de convergen\[, respectiv convergen\[punctual[, aproape uniform[, uniform[, @n medie]i @n medie p[tratic[.

12. **Propozi\ie**. *#ntre semi-normele unei func\ii au loc inegalit[\ile :*

a) Dac[$f:X\to\mathbf{R}$ *, cu* $X\neq f$ *un spa\iu topologic]i dac[* $x\in K\subseteq X$*, cu* K *o mul\ime compact[, atunci, presupun`nd f continu[ ]i m[rginit[, avem:*

$$p_x(f)\le p_K(f)\le\|f\| \ .$$

b) Dac[$f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *este m[rginit[ ]i de p[trat integrabil atunci (ea este]i integrabil[ ]i) avem :*

$$\| f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\| f\|_2 \leq (b-a)\| f\|,$$

unde prin $\| \;\|$ *am notat norma "sup"* (spre deosebire de §2).

Demonstra\ie. Afirma\ia a) este evident[. Prima inegalitate enun\at[la b) este exact inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz scris[pentru $|f|$]i 1, ambele de p[trat integrabil pe $[a,b]$.

Ultima inegalitate rezult[din faptul c[$|f(x)| \leq \| f\|$ pentru orice $x \in [a,b]$, dup[aplicarea teoremei de majorare a integralei

$$\left|\int_a^b f^{\,2}(t)dt\right| \leq \| f\|^2 (b-a).$$

Faptul c[exist[$\int_a^b |f(t)|dt$ rezult[tot din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz aplicat[func\iilor $|f|$]i 1.

❑

11. **Observa\ii**. O consecin\[imediat[a acestor inegalit[\i este rela\ia dintre convergen\e. Astfel: convergen\a uniform[**implic[** toate celelalte tipuri de convergen\[(corespunz[toare seminormelor $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$]i 5°). Dup[cum se]tie din analiza matematic[(vezi [23]), acest fapt se reflect[ ]i @n aceea c[aceast[convergen\[transmite cele mai multe propriet[\i ale func\iilor din]ir la func\ia limit[(integrabilitate, continuitate, etc.). Desigur, aceasta determin[un interes aparte pentru convergen\a uniform[ ]i @n cazul seriilor Fourier.

#n continuare vom face o trecere @n revist[a principalelor spa\ii de func\ii ce se folosesc @n cadrul analizei Fourier, inclusiv spa\iile men\ionate @n §2. Ca o caracteristic[a acestor spa\ii men\ion[m @nc[de la @nceput faptul c[elementele lor sunt func\ii reale, definite pe un segment $\left[a,b\right]$ al dreptei reale.

12. **Principalele spa\ii de func\ii** utilizate @n analiza Fourier sunt:

1°. Spa\iul func\iilor ***analitice*** @ntr-o vecin[tate a segmentului $[a,b]$, format din func\iile care admit o dezvoltare Taylor @n orice punct din aceast[vecin[tate. Din acest spa\iu fac parte func\iile sistemului trigonometric.

2°. $C^0([a,b]^*)$=spa\iul func\iilor ***continue pe por\iuni*** (introdus @n §2).

3°. $C^1([a,b]^*)$=spa\iul func\iilor ***netede pe por\iuni*** (vezi §2).

4°. Lip$([a,b]^*)$=spa\iul func\iilor ***lipschitziene pe por\iuni pe segmentul*** $[a,b]$; este format din func\ii care @ndeplinesc condi\ia lui Lipschitz, anume exist[$L>0$ @nc`t pentru orice $x', x'' \in (a_k, a_{k+1})$ avem $\left|f(x')-f(x'')\right|<L\left|x'-x''\right|$, unde $\{a_0,\dots,a_n : a_0=a<a_1<\cdots \quad \cdots<a_n=b\}$ este o diviziune a segmentului $[a,b]$.

5°. $BV([a,b])=$spa\iul func\iilor cu ***varia\ie m[rginit[*** pe $[a,b]$. Reamintim (vezi [13]) c[dac[$d=\{x_0,x_1,\dots,x_n : a=x_0<x_1<\cdots \quad \cdots<x_n=b\}$ este o diviziune a segmentului $[a,b]$, varia\ia func\iei $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ pe diviziunea d este num[rul

$$\bigvee_a^b{}_d(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1}-f(x_k)\right|,$$

iar varia\ia (total[) a lui *f* pe $[a,b]$ este num[rul (finit sau nu)

$$\overset{b}{\underset{a}{\vee}}{}_d(f) = \sup_{d\in\Delta} \overset{b}{\underset{a}{\vee}}{}_d(f),$$

unde Δ este mul\imea tuturor diviziunilor segmentului $[a,b]$. Dac[varia\ia total[este finit[, spunem c[func\ia *f* este cu varia\ie m[rginit[.

6°. $L^1([a,b])$ =spa\iul func\iilor ***integrabile*** pe $[a,b]$ este format din func\ii $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ integrabile pe $[a,b]$, pentru care exist[

$$\int_a^b |f(t)|dt\,.$$

7°. $L^2([a,b])$ =spa\iul func\iilor de ***p[trat integrabil*** (vezi §2) este format din func\ii $f:[a,b]\to \mathbf{R}$, integrabile pe $[a,b]$, pentru care exist[$\int_a^b |f(t)|^2\,dt$.

Cu aceste preciz[ri, problema convergen\ei seriilor Fourier cap[t[o formulare]i mai concret[: fiind dat[o func\ie periodic[din unul din spa\iile de mai sus, s[se stabileasc[@n ce norm[(semi-norm[) seria Fourier ata]at[acestei func\ii converge]i c[tre cine converge. Aceast[problem[este corect formulat[deoarece C^∞ este cel mai mic, iar L^1 este cel mai mare dintre aceste spa\ii (@n sensul incluziunii). Propozi\ia ce urmeaz[stabile]te ce incluziuni exist[@ntre spa\iile men\ionate, fapt deosebit de util @n rezolvarea problemei convergen\ei seriilor Fourier.

13. **Propozi\ie**. *#ntre spa\iile de func\ii introduse mai sus, considerate pe acela]i segment al dreptei reale (care fiind acela]i nu va mai fi scris), avem urm[toarele incluziuni (stricte):*

$$C^{\infty} \subset C^1 \subset \text{Lip} \subset \begin{matrix} BV \\ C^0 \end{matrix} \subset L^2 \subset L^1.$$

Demonstra\ie. Prima incluziune este evident[. Pentru a doua putem folosi teorema cre]terilor finite pe intervalele $[a_k, a_{k+1}]$ pe care f' este continu[, adic[pentru orice $x', x'' \in [a_k, a_{k+1}]$ consider[m $c \in (x', x'')$ @nc`t $f(x') - f(x'') = f'(c)(x' - x'')$. Se vede c[este @ndeplinit[condi\ia Lipschitz cu $L = \|f'\|$.

Pentru a ar[ta c[$\text{Lip}([a,b]^*) \subset BV([a,b])$ este suficient s[ar[t[m c[pe orice segment $[a_k, a_{k+1}]$ pe care *f* este lipschitzian[, varia\ia ei este m[rginit[.

Pentru aceasta este suficient s[observ[m c[pentru orice diviziune $d = \{a_k = a'_0, a'_1, \ldots, a'_n = a_{k+1} : a'_0 < a'_1 < \cdots < a'_n\}$ avem

$$\bigvee_a^b {}_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(a'_{i+1}) - f(a'_i) \right| \le L \sum_{i=0}^{n-1} (a'_{i+1} - a'_i) = L(a_{k+1} - a_k).$$

Faptul c[orice func\ie Lipschitzian[este continu[rezult[direct din defini\ii. #ntre spa\iile BV]i C^0 nu exist[incluziuni (vezi [13]).

Pentru incluziunea $BV \subset L^2$ observ[m mai @nt`i c[dac[*f* este cu varia\ie m[rginit[pe $[a,b]$, atunci]i f^2 este cu varia\ie m[rginit[pe $[a,b]$. #ntr-adev[r, pentru orice $x \in [a,b]$ avem

$$|f(x)| \le |f(x) - f(a)| + |f(a)| \le \bigvee_a^b (f) + |f(a)| = M,$$

deci orice func\ie cu varia\ie m[rginit[este m[rginit[. Atunci pentru orice $x_k, x_{k+1} \in [a,b]$ avem

$$\left|f^2(x_k) - f^2(x_{k+1})\right| = \left|f(x_k) - f(x_{k+1})\right| \cdot \left|f(x_k) + f(x_{k+1})\right|$$

$$\leq 2M\left|f(x_k) - f(x_{k+1})\right|$$

de unde, prin @nsumare, pe diviziunea considerat[, rezult[m[rginirea varia\iei lui f^2.

Dac[\inem cont de teorema lui Jordan, care arat[c[o func\ie este cu varia\ie m[rginit[pe $[a,b]$ dac[ ]i numai dac[ea este diferen\a a dou[func\ii monotone (de acela]i fel), integrabilitatea lui f^2 rezult[din integrabilitatea func\iilor monotone (vezi [13]).

Incluziunea $C_0 \subset L^2$ rezult[din aceea c[dac[f este continu[, atunci]i f^2 este continu[, deci integrabil[.

#n sf`r]it $L^2 \subset L^1$ deoarece func\ia 1 este integrabil[pe $[a,b]$]i @n general $|fg| \leq \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$(ca @n [16] sau \inem cont de egalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz, ca @n §2). Faptul c[incluziunile sunt stricte rezult[din exemple.

❑

Din punct de vedere practic, propozi\ia de mai sus este util[@n sensul c[dac[pentru o func\ie dintr-un anume spa\iu se stabile]te un criteriu de convergen\[a seriilor Fourier ata]ate, acel criteriu r[m`ne valabil pentru toate subspa\iile spa\iului respectiv. #n particular, toate criteriile studiate sunt aplicabile func\iilor din C^{∞}.

Vom discuta @n continuare c`teva criterii de convergen\[ uniform[ ]i aproape uniform[ pentru seriile Fourier, utile @n situa\ia c`nd seria Fourier este dat[f[r[s[se]tie func\ia c[reia @i este ata]at[.

14. **Propozi\ie**.*Dac[coeficien\ii unei serii Fourier sunt astfel @nc`t seria* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)$ *este convergent[, atunci seria dat[este absolut]i uniform convergent[pe* **R.**

Demonstra\ie. L[s`nd la o parte constanta $\frac{a_0}{2}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ avem inegalit[\ile:

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n|,$$

adic[termenul general al seriei Fourier se majoreaz[, uniform @n raport cu *x*, cu termenul general al unei serii numerice convergente (prin ipotez[). Se aplic[criteriul major[rii.

❑

Pentru o condi\ie suficient[de aproape uniform convergen\[avem nevoie de un rezultat ajut[tor:

15. **Lem[**. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *o serie de func\ii* $u_n : I \to \mathbf{R}$*, unde I este un interval al dreptei reale,]i fie* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *un]ir de numere reale. Dac[*

1°. *Seria de func\ii are sumele par\iale egal (uniform) m[rginite*

2° *}irul* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *este convergent la* 0,

3° *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_{n+1} - a_n \right|$ *este convergent[,*

atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ *este uniform convergent[pe I*.

Demonstra\ie. S[not[m sumele par\iale ale seriei de func\ii cu $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$]i s[explicit[m $\sum_{k=n}^{n+p} a_k u_k$ @n vederea aplic[rii criteriului de convergen\[al lui Cauchy. Astfel, calcul[m:

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k u_k = \sum_{k=n}^{n+p} a_k (v_k - v_{k-1}) = \sum_{k=n}^{n+p} a_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} a_k v_{k-1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p} a_k v_k - \sum_{i=n-1}^{n+p-1} a_{i+1} v_i = \sum_{k=n-1}^{n+p-1} a_k v_k - a_{n-1} v_{n-1} +$$

$$+ a_{n+p-1} v_{n+p-1} - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} a_{k+1} v_k = \sum_{k=n-1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) v_k -$$

$$- a_{n-1} v_{n-1} + a_{n+p-1} v_{n+p-1}.$$

Rezult[majorarea

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k u_k \right| \le \sum_{k=n-1}^{n+p-1} \left| a_k - a_{k+1} \right| \cdot \left| v_k \right| + \left| a_{n-1} \right| \cdot \left| v_{n-1} \right| + \left| a_{n+p-1} \right| \cdot \left| v_{n+p-1} \right|.$$

Prin ipotez[ ]tim c[exist[$M \in \mathbf{R}$ @nc`t pentru orice $k \in \mathbf{N}$ s[avem $\left| v_k \right| \le M$, deci

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k u_k\right| \leq M[\sum_{k=n-1}^{n+p-1} \quad |a_k - a_{k+1}| + |a_{n-1}| + |a_{n+p-1}|].$$

Pe de alt[parte, din condi\iile 2°]i 3° deducem c[pentru orice $e > 0$ se poate determin un rang $n_0(e) \in \mathbf{N}$, astfel @nc`t pentru orice $n \in \mathbf{N}$, cu $n - 1 \geq n_0(e)$ s[avem

$$\sum_{k=n-1}^{n+p-1} |(a_k - a_{k+1})| < \frac{e}{3M}$$

]i $|a_{n-1}| < \dfrac{e}{3M}$ (deci]i $|a_{n+p-1}| < \dfrac{e}{3M}$).

#n concluzie seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ verific[condi\ia Cauchy uniform pe *I*, deci este uniform convergent[.

❑

16. **Propozi\ie**. *Dac[coeficien\ii unei serii Fourier @ndeplinesc condi\iile:*

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$*;*

b) *seriile* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$]i $\sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1} - b_n|$ *sunt convergente, atunci seria Fourier dat[este convergent[aproape uniform pe intervalul* $I = (0, 2p)$*.*

Demonstra\ie. #n seria Fourier dat[se pot eviden\ia dou[serii care @ndeplinesc condi\iile lemei precedente:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{]i } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

cu $u_n(x)=\cos nx$ @n prima]i $u_n(x)=\sin nx$ @n cea de a doua.

#ntr-adev[r, pentru $x \neq 2pp, p \in \mathbf{Z}$, avem identitatea

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\,\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1},$$

de unde rezult[imediat major[rile

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{2}{\left|e^{ix}-1\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{2}{\left|e^{ix}-1\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

Se observ[u]or c[pentru orice compact $K \subset (0,2p)$ exist[un $h>0$ @nc`t $K \subseteq [h, 2p-h]$, iar pentru acest $h$ exist[ $M \in \mathbf{R}$ @nc`t $\left|\sin\frac{x}{2}\right|^{-1} \leq M$.

❑

17. **Propozi\ie**. *Dac[ ]irurile de numere reale* (a_n), (b_n) *sunt descresc[toare]i convergente la zero, atunci seria Fourier*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nwx + b_n \sin nwx)$$

este a.u. convergent[pe $(0,T)$*, unde* $w=\frac{2p}{T}$*.*

Demonstra\ie. Aplic[m criteriul lui Dirichlet (vezi ([23], etc.)) seriilor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nwx \quad \text{]i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nwx,$$

deoarece acestea au forma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ cu $f_n \xrightarrow{u} 0$ descresc`nd, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ are sumele par\iale egal m[rginite pe orice compact din $(0,T)$. #ntr-adev[r, @n loc de $f_n$ lu[m $a_n$, respectiv $b_n$, iar @n loc de $g_n(x)$ lu[m $\cos nwx$, respectiv $\sin nwx$. R[m`ne de evaluat $s_n=\sum_{k=1}^{n}\cos kwx$]i $s_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kwx$, pentru care se procedeaz[ca @n lema lui Dirichlet ob\in`ndu-se expresii cu numitorul $\sin\frac{wn}{2}$. ❑

Pentru probleme de sumabilitate a seriilor Fourier, dezvolt[ri @n serie ale func\iilor neintegrabile,]i alte cercet[ri asupra seriilor trigonometrice recomand[m [7]. De asemenea, din punct de vedere teoretic putem realiza @nsumarea unei serii Fourier @n sens generalizat astfel @nc`t convergen\a c[tre $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ s[fie asigurat[doar de existen\a acestor limite (vezi [13], vol. III, etc.).

18. **#nsumarea @n sens generalizat** se poate face @n mai multe feluri, dintre care men\ion[m:

a**) Metoda Poisson-Abel** @n care @n loc s[ata][m lui *f* o serie Fourier, consider[m seria

$$f(r,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

]i @nsum[m ca la problema lui Dirichlet pentru cerc.

b) **Metoda Cesaro-Fejér** const[@n evaluarea mediei aritmetice a primelor *n* sume par\iale, ob\in`nd

$$s_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(x)=\frac{1}{2np}\int_{-p}^{p} f(u)\left[\frac{\sin\frac{n}{2}(u-x)}{\sin\frac{1}{2}(u-x)}\right]^2 du\,.$$

Se vede c[@n locul nucleului lui Dirichlet, aici apare **nucleul lui Fejér**

$$\frac{1}{np}\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 .$$

ANEXA I.2. : **Fenomenul Gibbs**

Neriguros vorbind (vezi [13],vol.III, etc.), fenomenul Gibbs este o "iner\ie" manifestat[de sumele (]i deci]i de seria) Fourier @n procesul de aproximare a unei func\ii @n jurul punctelor de discontinuitate de spe\a I-a, @n sensul c[saltul acestor sume par\iale este strict mai mare dec`t saltul func\iei. #n studiul acestui fenomen este util s[fix[m o anume "func\ie standard" ce prezint[un salt @n origine]i cu ajutorul c[reia s[putem reduce orice func\ie ce are discontinuit[\i, la una continu[; aceasta va fi definit[pe $[0, 2\pi)$ prin

$$g_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{dac[} x \in (0, 2\pi) \\ 0 & \text{dac[} x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

apoi prelungit[prin periodicitate (vezi fig.A I.2.1.)

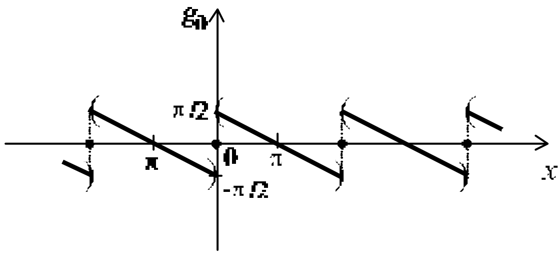


Fig.A. I.2.1.

1.**Propozi\ie**. *Pentru orice* $x \in [0, 2\pi)$ *avem :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = g_0(x) \tag{2}$$

Demonstra\ie. Se constat[c[prelungirea perioadic[a lui g_0 este o func\ie impar[, deci $a_n = 0$ pentru to\i *n*=0,1,... Calcul`nd $b_k = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g_0(x) \sin kx \, dx$ se ob\ine $b_k = \dfrac{1}{k}, k = 1, 2, \ldots$

Se aplic[apoi criteriul netezimii pe por\iuni, care asigur[egalitatea (2) @n sensul convergen\ei punctuale (sau, mai exact, folosind criteriul Lipschitz, @n sensul convergen\ei aproape uniforme pe intervalul $(0,2p)$).

Saltul func\iei g_0 @n origine este @n esen\[descris de func\ia $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, exprimat[prin (vezi fig.A. I.2.2.) :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{p - x}{2} & \text{dac[} x > 0 \\ 0 & \text{dac[} x = 0 \\ \dfrac{-p - x}{2} & \text{dac[} x < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

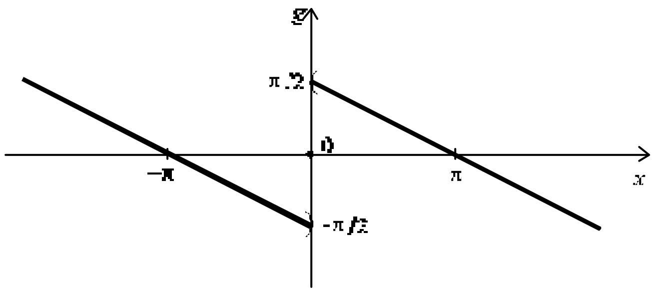


Fig.A. I.2.2.

care poate fi utilizat[@n scopul "elimin[rii " discontinuit[\ilor de prima spe\[pentru o func\ie arbitrar[, neted[pe por\iuni.

2. **Propozi\ie**. *Orice func\ie* $f:[a,b] \to \mathbf{R}$, *neted[pe por\iuni, pentru care* $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ *pentru orice* $x \in [a,b]$, *admite exprimarea* $f = f_1 + f_2$ *unde* f_1 *este continu[pe* $[a,b]$, *iar*

$$f_2(x) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k+0) - f(x_k-0)\right]\cdot g(x-x_k),$$

(4)

unde $x_k, k=\overline{1,n}$, *sunt punctele de discontinuitate ale lui f,* $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n < b = x_{n+1}$, *iar g este dat de* (3).

Demonstra\ie. Fix[m $i \in \{1,..,n\}$]i ar[t[m c[$f_1(x_i+0) = f_1(x_i-0)$.

Ca exemplu,

$$f_1(x_i+0) = f(x_i+0) - \frac{1}{p}\left[f(x_i+0) - f(x_i-0)\right]g(0+) -$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{k\neq i}\left[f(x_k+0) - f(x_k-0)\right]g(x_i - x_k + 0) =$$

$$= f(x_i) - \frac{1}{p}\sum_{k\neq 1}\left[f(x_k+0) - f(x_k-0)\right]g(x_i - x_k)$$

Printr-un calcul analog se g[se]te aceea]i valoare pentru $f_1(x_i-0)$.

Pe intervalele $(x_i, x_{i+1}), i=0,...,n$, unde *f* este continu[, avem $f_2(x) = 0$, deci $f(x) = f_1(x)$. #n concluzie f_1 este continu[pe @ntregul segment $[a,b]$.

❑

Pentru eviden\ierea fenomenului Gibbs va fi util s[evalu[m **restul seriei** (2), notat

$$R_n(x) = s_n(x) - g_0(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k} - \frac{p - x}{2}. \qquad (5)$$

3. **Lem[**. *Pentru restul din formula* (5) *avem exprimarea :*

$$R_n(x) = -\frac{\boldsymbol{p}}{2} + \boldsymbol{p}\int_0^x D_n(t)\,dt\,, \tag{6}$$

unde

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\boldsymbol{p}\sin\frac{t}{2}} \tag{7}$$

este nucleul lui Dirichlet.

Demonstra\ie. Se calculeaz[derivata :

$$R_n^{'}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \boldsymbol{p}D_n(x)$$

proced`nd ca]i @n demonstrarea formulei lui Dirichlet pentru sumele par\iale ale unei serii Fourier. #n concluzie putem scrie

$$R_n(x) = C + \boldsymbol{p}\int_0^{p} D_n(t)\,dt,$$

unde

$C = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} R_n(x)$. Conform (5), ob\inem $C = -\frac{p}{2}$, ceea ce demonstreaz[formula (6). ❑

4. **Lem[**. *Pentru orice* $x \in (0, \boldsymbol{p})$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = -\frac{\pi}{2} + \lim_{n\to\infty} C_n(x), \tag{8}$$

unde $C_n(x) = \int_0^{nx} \frac{\sin t}{t}\,dt.$

Demonstra\ie. Introduc`nd @n (6) expresia (7) a nucleului lui Dirichlet, cu explicitarea lui $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t = \sin nt \cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\cos nt,$ se ob\ine :

$$R_n(x) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin nt}{2tg\frac{t}{2}}dt + \frac{1}{2}\int_0^x \cos nt\,dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin nt}{t}dt + \int_0^x \sin nt\left[\frac{1}{2tg\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]dt + \frac{1}{2}\int_0^x \cos nt\,dt.$$

Se vede u]or c[$\int_0^x \frac{\sin nt}{t}dt = \int_0^{nx}\frac{\sin t}{t}dt = C_n(x)$, deci not`nd cu $A_n(x)$]i $B_n(x)$ celelalte dou[integrale de mai sus, problema se reduce la a ar[ta c[$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = 0$]i $\lim_{n\to\infty} B_n(x) = 0$.

#ntr-adev[r, conform lemei Riemann, avem

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^x \cos nt\,dt = 0,$$

chiar uniform @n raport cu $x \in (o,\pi)$.

Not`nd $j(t) = \dfrac{1}{2tg\dfrac{t}{2}} - \dfrac{1}{t}$

integrala r[mas[devine:

$$A_n(x) = \int_0^x (\sin\, nt)j(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x (\sin\, nt)j(t)dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\frac{p}{n}}^{x+\frac{p}{n}} (\sin\, nt)j(t+\frac{p}{n})dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{p}{n}} (\sin\, nt)j(t)dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{p}{n}}^{x} (\sin\, nt)[j(t) - j(t+\frac{p}{n})]dt -$$

$$\frac{1}{2}\int_{x}^{x+\frac{p}{n}} (\sin\, nt)j(t+\frac{p}{n})dt\,.$$

Deoarece @n origine func\ia j are o singularitate aparent[, va exista $M > 0$ astfel @nc`t $|j(t)| \leq M$ pentru orice $x \in (0, p)$. Rezult[

$$|s_n(x)| \leq \frac{1}{2}\frac{p}{n}M + \frac{1}{2}\int_{\frac{p}{n}}^{x}\left|j(t) - j(t+\frac{p}{n})\right|dt + \frac{1}{2}\frac{p}{n}M\,.$$

Din continuitatea uniform[a func\iei j pe $(0, p)$ deducem c[pentru orice $e > 0$ exist[$n_1(e) \in \mathbf{N}$ astfel @nc`t pentru orice $n \geq n_1(e)$ s[avem

$$\int_{\frac{p}{n}}^{x} \left| j(t) - j(t+\frac{p}{n})\right| dt \le \int_{0}^{p} \frac{e}{p}\, dt = e .$$

Not`nd cu $n_2(e) \in \mathbf{N}$ rangul pentru care $n \ge n_2(e)$ implic[$\frac{p}{n} M < \frac{e}{2}$, deducem c[pentru $n \ge \max\{n_1(e), n_2(e)\}$ avem $\left|A_n(x)\right| < e$. #n concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = 0$ uniform dup[$x \in (0, p)$.

❑

Pentru cele ce urmeaz[s[not[m

$$G(v) = \int_{0}^{v} \frac{\sin t}{t}\, dt . \qquad (9)$$

5. **Lem[**. *Pentru orice* $n \in \mathbf{N}^*$ *avem* $C_n(\frac{p}{n}) = G(p) > \frac{p}{2}$.

Demonstra\ie. Deoarece integralele

$$I_k = \int_{kp}^{(k+1)p} \frac{\sin t}{t} dt$$

sunt pozitive pentru *k* par, negative pentru *k* impar, iar]irul $\{\left|I_k\right|\}_{k \in \mathbf{N}}$ este descresc[tor, deducem c[func\ia *G* are un]ir de maxime locale $M_1 > M_3 > M_5 > \cdots$ @n punctele $p, 3p, 5p, \ldots$]i un]ir de minime locale $m_2 < m_4 < m_6 \cdots$ @n punctele $2p, 4p, 6p, \ldots$ #n concluzie $M_1 = G(p)$ este maximul absolut al func\iei *G* pe $\mathbf{R}_+$.

Egalitatea $C_n(\frac{p}{n}) = G(p)$ este imediat[, @n inegalitatea din enun\ rezult[calcul`nd

$$\lim_{v\to\infty} G(v) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{p}{2},$$

]i \in`nd cont de faptul c[maximul absolut s-a atins @n punctul $x = p$. ❑

6. **Observa\ie**. Aproxim`nd integrala (9), pentru *v*=*p* g[sim $G(p) \cong 1{,}85 \cong 1{,}18\frac{p}{2}$.

7. **Teorem[** (Gibbs). *Cu aproxima\ia de mai sus a lui G(p), avem*

$$\lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{p}{n}\right) = 1{,}18\,\frac{p}{2}. \qquad (10)$$

Demonstra\ie. Conform rezultatelor anterioare avem

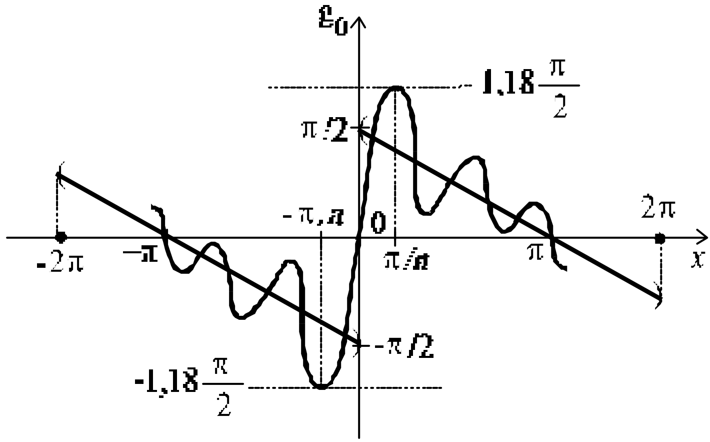


Fig.A. I.2.3

$$\lim_{n\to\infty} R_n\left(\frac{p}{n}\right) = -\frac{p}{2} + \lim_{n\to\infty} C_n\left(\frac{p}{n}\right) = -\frac{p}{2} + G(p) \cong 0{,}18\cdot\frac{p}{2},$$

iar conform nota\iei (5), ob\inem (10). ❑

#n concluzie, @n punctele $\frac{p}{n}$, sumele par\iale s_n prezint[maxime ce dep[]esc cu aproximativ 18 % limita la dreapta a func\iei g_0. Prin analogie, @n punctele $-\frac{p}{n}$, sumele par\iale au valori minime, cu aproximativ 18% mai mici dec`t limita la st`nga a lui g_0 @n origine, a]a cum se ilustreaz[@n figura A. I.2.3.

Conform propozi\iei 2, acest fenomen apare @n toate punctele de discontinuitate ale func\iei considerate.

ANEXA I.3. : **Serii Fourier multiple**

Analiza Fourier se poate extinde]i la func\iile periodice de mai multe variabile. Vom schi\a c`teva elemente ale acestei teorii @n cazul func\iilor de dou[ variabile, c`nd apar serii duble care au o form[real[relativ simpl[, apoi vom prezenta cazul a n variabile @n form[complex[.

1. **Defini\ie**. *Spunem despre func\ia de dou[variabile* $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *c[este* ***periodic[****, de perioad[* $T>0$ *@n raport cu prima variabil[ ]i* $S>0$ *@n raport cu cea de a doua, dac[*

$$f(x+T, y+S) = f(x,y)$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$.

2. **Observa\ii**. Deoarece printr-o schimbare simpl[de variabil[putem schimba perioadele, @n principiu putem accepta c[*T*=*S*. Periodicitatea func\iei *f* permite s[consider[m c[ini\ial *f* este definit[pe un dreptunghi

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -l \le x \le l, -h \le y \le h\}$$

unde *T*=2*l*]i *S*=2*h*, iar apoi este prelungit[prin periodicitate. Se poate vorbi]i de paritate, imparitate, etc. Func\iile considerate vor fi cel pu\in de p[trat integrabil pe compactul *D*, adic[de clas[$L^2_{\mathbf{R}}(D)$. Produsul scalar pe acest spa\iu va fi

$$\langle f, g \rangle = \iint_D f(x,y)\overline{g}(x,y)\,dxdy,$$

din care deriv[no\iunile obi]nuite de ortogonalitate, norm[, etc. Men\ion[m c[datorit[periodicit[\ii, @n loc de *D* putem integra pe orice "transla\ie" a acestuia (*a*,*b*)+*D*, f[r[a schimba valoarea integralei.

De asemenea, consider[m utile nota\iile

$$w=\frac{2p}{T}=\frac{p}{l},\, h=\frac{2p}{S}=\frac{p}{h}.$$

#n sensul acestor no\iuni se constat[c[:

3. **Propozi\ie**. *Sistemul de func\ii*

$$\mathrm{S}_{T,S}=\{1, \cos mwx, \sin mwx, \cos nhy, \sin nhy,$$

$$\cos mwx \cos nhy, \sin mwx \cos nhy,$$

$$\cos mwx \sin nhy, \sin mwx \sin nhy : m,n \in \mathbf{N}^*\}$$

este ortogonal pe *D*.

Demonstra\ia se bazeaz[pe descompunerea integralelor duble pe dreptunghiul *D* a unor produse de func\ii numai de *x*]i numai de *y* @n integrale simple, cunoscute din analiza Fourier a func\iilor de o variabil[.

|in`nd cont de faptul c[cos 0 = 1, putem distinge @n $\mathrm{S}_{T,S}$ patru tipuri de termeni,]i anume:

$$\mathrm{S}_{T,S}=\{\cos mwx \cos nhy, \sin mwx \cos nhy, \cos mwx \sin nhy,$$

$$\sin mwx \cos nhy : m,n \in \mathbf{N}\}.$$

Coeficien\ii Fourier ai seriei duble se eviden\iaz[@n:

4. **Teorem[**. *Dac[egalitatea*

$$f(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty} \boldsymbol{l}_{m,n}[a_{m,n}\cos mwx\cos n\boldsymbol{h}y+$$

$$+b_{m,n}\sin mwx\cos nhy+c_{m,n}\cos mwx\sin nhy+$$

$$+d_{m,n}\sin mwx\sin nhy]$$

are loc @n sensul convergen\ei uniforme, atunci

$$a_{m,n}=\frac{1}{lh}\iint_D f(x,y)\cos m\boldsymbol{w}x\cos n\boldsymbol{h}y\,dx\,dy$$

$$b_{m,n}=\frac{1}{lh}\iint_D f(x,y)\sin m\boldsymbol{w}x\cos n\boldsymbol{h}y\,dx\,dy$$

$$c_{m,n}=\frac{1}{lh}\iint_D f(x,y)\cos m\boldsymbol{w}x\sin n\boldsymbol{h}y\,dx\,dy$$

$$d_{m,n}=\frac{1}{lh}\iint_D f(x,y)\sin m\boldsymbol{w}x\sin n\boldsymbol{h}y\,dx\,dy$$

pentru orice $m,n\in\mathbf{N}$ *, iar*

$$\boldsymbol{l}_{m,n}=\begin{cases}\frac{1}{4}\ \text{dac[m = n = 0}\\ \frac{1}{2}\ \text{dac[}(m>0\ \text{]i}\ n>0)\ \text{sau (m = 0]i n > 0)}\\ 1\ \text{dac[}m>0\ \text{]i}\ n>0.\end{cases}$$

5. **Observa\ii**. Convergen\a uniform[a seriei duble, presupus[@n teorema anterioar[, asigur[continuitatea lui *f* , dar despre ***coeficien\ii Fourier*** ai unei func\ii de dou[variabile se poate vorbi]i dac[$f\in L^2_{\mathbf{R}}(D)$, f[r[a fi continu[. #n acest caz, dup[calculul acestor coeficien\i spunem c[func\iei *f* ***i se ata]eaz[*** o serie Fourier dubl[. Problema convergen\ei]i a egalit[\ii seriei cu func\ia face obiectul unor criterii de convergen\[, dintre care men\ion[m (f[r[demonstra\ie, vezi ([9])):

6. **Teorem[**. (Criteriul netezimii pentru convergen\[punctual[). *Dac[f este continu[, cu derivatele par\iale* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *m[rginite pe* $\mathbf{R}^2$, *iar* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *este continu[@n punctul (x,y) interior domeniului D, atunci seria Fourier dubl[ata]at[lui f converge @n punctul (x,y) c[tre f(x,y).*

7. **Teorem[**. (Criteriul netezimii pentru convergen\a uniform[). *Dac[f,* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *]i* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *sunt continue pe* $\mathbf{R}^2$, *atunci seria Fourier dubl[asociat[lui f converge uniform pe* $\mathbf{R}^2$ *c[tre f.*

O alt[proprietate remarcabil[este:

8. **Teorem[**. *Sistemul* $S_{T,S}$ *este complet]i are loc egalitatea lui Parceval:*

$$\iint_D f^2(x,y)dxdy = l^2h^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} l_{m,n}(a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 + d_{m,n}^2)$$

.

Pentru ilustrarea celor de mai sus consider[m:

9. **Exemple**. a) Dac[$f:[-p,p]^2 \to \mathbf{R}$ are valorile $f(x,y) = xy$]i apoi este prelungit[prin periodicitate, atunci $w = h = 1$]i rezult[$a_{m,n} = b_{m,n} = c_{m,n} = 0$ precum]i $d_{0,n} = d_{m,0} = 0$ pentru to\i $m,n \in \mathbf{N}$. #n rest $d_{m,n} = (-1)^{m+n}\frac{4}{mn}$, pentru to\i $m,n \in \mathbf{N}^*$. #n consecin\[avem

$$xy = 4\sum_{m,n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{\sin mx \sin ny}{mn}$$

@n sensul convergen\ei punctuale @n interiorul lui *D*, notat $\overset{\circ}{D}$.

Acela]i rezultat se ob\ine @nmul\ind seriile Fourier ale func\iilor identice pe $[-p,p]$, de o variabil[.

b) S[consider[m func\ia cu acelea]i valori $f(x,y)=xy$, dar $f:[0,2p]^2 \to \mathbf{R}$, cu perioadele $T=S=2p$. Ref[c`nd calculele se ob\ine

$$xy = p^2 - 2p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mx}{m} - 2p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny}{n} + 4\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin mx \sin ny}{mn}$$

tot @n sensul convergen\ei punctuale @n $\overset{\circ}{D}$.

c) Pentru func\ia $f:[-1,1]\times[-2,2]\to \mathbf{R}$, de valori $f(x,y)=x^2y$, avem

$$f(x,y)=\frac{4}{3p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{npy}{2}+$$

$$+\frac{16}{p^3}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n+1}}{m^2n}\cos pmx \sin\frac{pny}{2}.$$

@n sensul convergen\ei punctuale @n $\overset{\circ}{D}$.

d) Seria Fourier dubl[ata]at[func\iei $f:[-1,+1]\times[-p,p]\to \mathbf{R}$, de valori $f(x,y)=x\frac{(p-y)^2}{4}$, este

$$\frac{2p}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\sin pmx + \frac{2}{p}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n+1}}{mn^2}\sin pmx \cos ny$$

]i converge punctual c[tre f pe $\overset{\circ}{D}$.

e) S[consider[m $S=T=2p$]i $f:\mathbf{R}^2\to \mathbf{R}$ periodic[, @nc`t @n $\overset{\circ}{D}$ are valorile

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{dac[} 0<x\leq y<2p \\ 0 & \text{dac[} 0<y<x<2p\end{cases}.$$

Coeficien\ii seriei Fourier duble vor fi:

$$a_{m,n}=\frac{1}{p^2}\int_0^{2p}\cos mx\,dx\int_0^x\cos ny\,dy=\begin{cases}2 \text{ dac[} m=n=0 \\ 0 \text{ @n celelalte cazuri}\end{cases}$$

$b_{m,n}=0$ pentru orice $m,n\in\mathbf{N}$, $c_{0,0}=0$,

$$c_{0,n}=\frac{1}{p^2}\int_0^{2p}dx\int_0^x\sin ny\,dy=-\frac{1}{p^2 n}\int_0^{2p}[\cos nx-1]\,dx=\frac{2}{pn}$$

pentru orice $n\geq 1$,

$$c_{m,n}=\begin{cases}0 & \text{dac[} m\neq n \\ -\dfrac{1}{pm} & \text{dac[} m=n\geq 1\end{cases}$$

$$d_{00}=0,\ d_{m,0}=-\frac{2}{mp}\ \text{dac[} m\geq 1,\ \text{]i}$$

$$d_{m,n}=\begin{cases}0 & \text{dac[} m\neq n \\ \dfrac{1}{mp} & \text{dac[} m=n\geq 1\end{cases}.$$

#n consecin\[seria Fourier dubl[devine o sum[simpl[@n dou[variabile,]i anume:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny-\sin nx+\sin n(x-y)}{n}.$$

Aceast[serie converge punctual c[tre *f* @n D^0, cu excep\ia punctelor de pe diagonala $x = y$, unde are suma $\frac{1}{2}$. De asemenea suma seriei este $\frac{1}{2}$ dac[$x=2kp$ sau $y=2lp$, oricare ar fi $k,l\in\mathbf{Z}$.

10. **Observa\ie**. Extinderea acestor rezultate de la dou[la mai multe variabile se bazeaz[pe ***forma complex[*** a seriei Fourier duble. #ntr-adev[r, folosind formulele Euler, seria Fourier dubl[se poate scrie sub forma

$$f(x,x)\sim\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}A_{m,n}e^{p\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)i}$$

unde

$$A_{m,n}=\frac{1}{4lh}\iint_D f(x,y)e^{-p\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)i}dxdy$$

pentru orice $m,n\in\mathbf{Z}$.

Mai mult, consider`nd "cazul standard" c`nd *l*=*h*=p]i introduc`nd variabilele vectoriale $\bar{t}=(x,y)$]i $\bar{k}=(m,n)$, putem scrie seria Fourier dubl[ata]at[lui *f* sub forma:

$$f(\bar{t})\sim\sum_{\bar{k}\in\mathbf{Z}^2}A_{\bar{k}}\,e^{i\,\bar{k}\,\bar{t}},$$

unde

$$A_{\bar{k}}=\frac{1}{(2p)^2}\iint_D f(\bar{t})e^{i\,\bar{k}\,\bar{t}}\,d\bar{t}.$$

Extinderea la un num[r arbitrar $n \in \mathbf{N}^*$ de variabile se face prin urm[toarele rezultate:

11. **Propozi\ie**. *Sistemul de func\ii*

$$\text{S} = \left\{ \frac{e^{i\bar{k}\bar{t}}}{(\sqrt{2p})^n} : k \in \mathbf{Z}^n \right\}$$

este ortonormal pe cubul n-dimensional

$$D = \left\{ \bar{t} = (x_1, ..., x_n) : -p \le x_j \le p,\ j = \overline{1,n} \right\}.$$

Demonstra\ia se bazeaz[pe reducerea situa\iei la cele cunoscute @n cazul unei singure variabile privind forma complex[a seriei Fourier. #ntr-adev[r, not`nd $\bar{k} = (k_1, ..., k_n)$]i $\bar{l} = (l_1, ..., l_n)$, ob\inem:

$$\rangle j_{\bar{k}}, j_{\bar{l}} \langle = \int_D \frac{1}{(\sqrt{2p})^n} e^{i\bar{k}\bar{t}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2p})^n} e^{i\bar{l}\bar{t}} d\bar{t} =$$

$$= \frac{1}{(2p)^n} \int_{-p}^{p} e^{i(k_1 - l_1)x_1} dx_1 \ldots \int_{-p}^{p} e^{i(k_n - l_n)x_n} dx_n .$$

#n consecin\[:

$$\rangle j_{\bar{k}}, j_{\bar{l}} \langle = \begin{cases} 0 \text{ pentru } \bar{k} \ne \bar{l} \\ 1 \text{ pentru } \bar{k} = \bar{l}, \end{cases}$$

prin $\overline{k} \neq \overline{l}$ @n\eleg`nd faptul c[cel pu\in pentru un $j = \overline{1,n}$ avem $k_j \neq l_j$.

12. **Teorem[**. *Dac[*

$$f(t) = \sum_{\overline{k} \in \mathbf{Z}^n} A_{\overline{k}}\, e^{i\,\overline{k}\,\overline{t}}$$

@n sensul convergen\ei uniforme pe cubul n-dimensional D, atunci coeficien\ii $A_{\overline{k}}$ au valorile

$$A_{\overline{k}} = \frac{1}{(2p)^n} \int_D f(\overline{t}) e^{i\,\overline{k}\,\overline{t}}\, d\overline{t}\,.$$

Demonstra\ia se bazeaz[pe ortogonalitatea sistemului S din propozi\ia 11. Numerele $A_{\overline{k}}$ se numesc **coeficien\ii Fourier multipli** iar seria

$$\sum_{\overline{k} \in \mathbf{Z}^n} A_{\overline{k}}\, e^{i\,\overline{k}\,\overline{t}}$$

se nume]te ***serie Fourier multipl[***.

Ca]i @n cazurile particulare c`nd $n = 1$ sau $n = 2$, coeficien\ii $A_{\overline{k}}$ se pot calcula pentru orice func\ie integrabil[ pe cubul *D,* caz @n care spunem doar c[ lui *f* i se ***ata]eaz[*** o serie Fourier multipl[, r[m`n`nd de studiat problema convergen\ei acestuia.

Capitolul II. INTEGRALA LUI FOURIER

Prin analogie cu teoria seriilor Fourier, care reprezint[analiza Fourier a semnalelor periodice, @n acest capitol vom dezvolta un studiu al semnalelor neperiodice. Formal, aceasta se reduce la @nlocuirea seriei cu o integral[, dar de fapt se dezvolt[o paralel[a teoriei prezentat[@n capitolul I.

§1. Formula lui Fourier

Pentru a putea transpune rezultatele analizei Fourier a semnalelor periodice la cazul semnalelor neperiodice vom interpreta semnalul neperiodic ca pe o limit[a semnalului periodic, c`nd perioada este infinit[. Mai exact, s[consider[m c[$T \to \infty$ @n formula

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikwx},$$

unde $w = \frac{2p}{T}$, iar c_k sunt coeficien\ii Fourier complec]i

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ikwt} dt .$$

Pentru a putea interpreta rezultatul trecerii la limit[, vom scrie aceast[formul[@n forma

$$f(x) \sim \frac{1}{2p} \sum_{-\infty}^{+\infty} w e^{ikw\,x} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ikw\,t} dt .$$

Se vede deja c[integrala @ntre limitele $-T/2$]i $T/2$ ar tinde, c`nd $T \to \infty$, la integrala improprie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ikw\,t} dt .$$

S[not[m apoi $kw = z_k$]i s[interpret[m mul\imea acestor puncte ca pe o "diviziune" $d = \{z_k : k \in \mathbf{Z}\}$ a lui **R**, cu norma $n(d) = \max\{|z_{k+1} - z_k| : k \in \mathbf{Z}\} = w$. Evident, norma diviziunii tinde la zero c`nd $T \to \infty$,

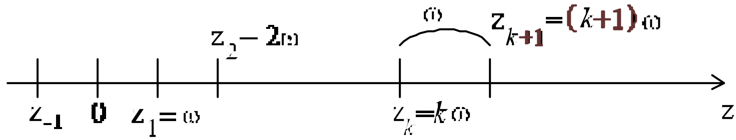


Fig. II.1.1.

lungimea fiec[rui interval fiind $\Delta z = z_{k+1} - z_k = w$.

#n rest, expresia $e^{ikw\,x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ikw\,t} dt$ reprezint[valorile func\iei

$$e^{izx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt} dt$$

@n punctele diviziunii d. De]i numai integralele @n sens propriu se definesc cu diviziuni (vezi [23], [26], etc), formula de mai sus sugereaz[c[pentru $T \to \infty$ este natural ca @n locul seriilor s[consider[m integrale, adic[

$$f(x) \sim \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt\,, \qquad (1)$$

unde $\int_{-\infty}^{\infty}$ se ia @n sens de integral[Riemann improprie pe **R** (]i @n general nu @n sensul valorii principale).

1. **Defini\ie**. *Se nume]te* ***integral[Fourier*** *(@n form[complex[) a func\iei* $f \in L^1_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ *expresia cu dou[integrale improprii*

$$\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt\,, \qquad (2)$$

depinz`nd de parametrul $x \in \mathbf{R}$*. Rela\ia (1) se nume]te* ***formula lui Fourier*** *]i se cite]te "lui f @n punctul x* ***i se ata]eaz[*** *integrala..."*

2. **Observa\ie.** Considera\iile f[cute la @nceputul paragrafului sunt doar o explica\ie]i **nu o demonstra\ie** pentru forma @n care scriem integrala lui Fourier. Deoarece]i la serii avem @n general ~ @n loc de =, aceast[situa\ie se men\ine cu at`t mai mult @n cazul integralei lui Fourier. De fapt cazul egalit[\ii este cel mai util @n practic[, dar stabilitatea ei presupune cunoa]terea unor teoreme similare criteriilor de convergen\[de la seriile Fourier.

Pentru eviden\ierea analogiei @ntre problematica seriilor Fourier]i a integralei Fourier schi\[m urm[toarea:

3. **Paralel[@ntre serii]i integrala Fourier**.

Elementul de compara\ie	Serii Fourier	Integrale Fourier
Obiectul teoriei	func\ii integrabile pe $[0, T]$, periodice, cu perioada T.	func\ii integrabile (@n sens impropriu) pe **R,** neperiodice
Cadrul teoretic	$L^2_{\mathbf{R}}([0, T])$	$L^1_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$
Prima problem[fundamental[(matematic[)	calculul coeficien\ilor Fourier	calculul integralei improprii $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt} dt$
Spectrul	Spectrul discret = mul\imea de coeficien\i Fourier	Spectrul continuu = *F*, sau valorile lui *F*
A doua problem[fundamental[(matematic[)	Convergen\a seriei Fourier ata]ate lui *F* (criterii)	convergen\a integralei $\int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{izx} dz$ (criterii similare)
Formul[Dirichlet	$s_n(x) = \frac{1}{p} \int_0^p [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$	$S_A(x) = \frac{1}{p} \int_0^\infty [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin At}{t} dt$
Ipoteza @n criteriul general (Dini)	exist[$\int_0^d \frac{j(t)}{t} dt$	exist[$\int_0^d \frac{j(t)}{t} dt$

Forma complex[(1) a integralei lui Fourier este comod[pentru eviden\ierea analogiei cu seriile, dar studiul acestei integrale sub raportul convergen\ei necesit[scrierea ei @n form[real[, precizat[de urm[toarea:

4. **Propozi\ie**. *Integrala Fourier ata]at[func\iei* $f \in L^1_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ *se poate scrie sub forma (real[)*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du\,. \tag{3}$$

Demonstra\ie. Deoarece $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, integrala lui Fourier se poate scrie sub forma

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i(x-t)z}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(x-t)\,dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)\,dt\right]$$

Din cauza imparit[\ii func\iei sin, func\ia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)\,dt$$

va fi impar[@n variabila *z*, deci integrala ei pe intervalul simetric $(-\infty,+\infty)$ va fi nul[. Din formula (2) r[m`ne deci partea real[

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos z(x-t)dt\ .$$

Formula anun\at[se ob\ine \in`nd cont de paritatea func\iei cos. ❑

5. **Nota\ie**. Deoarece sensul exact al integralei (3) este

$$\frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{0}^{A} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du\ ,$$

este normal s[distingem prin nota\ie urm[toarea "integral[par\ial["

$$S_A(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{A} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)du\ .$$

Prin analogie cu sumele par\iale de la seriile Fourier, avem:

6. **Lem[** (Formula lui Dirichlet). *Integrala* S_A *a func\iei* $f \in L^1_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ *are forma*

$$S_A(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x+t) + f(x-t)]\frac{\sin At}{t}dt\ . \qquad (4)$$

Demonstra\ie. Deoarece *f* este absolut integrabil[pe **R**, integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du$ este convergent[, chiar uniform @n raport cu $z \in [0, A]$. Pe de alt[parte $\cos z(u-x)$ este integrabil[pe $[0, A]$, iar $|f(u)\cos z(u-x)|$ este m[rginit[pe $[0,\infty)\times[0, A]$, deci (vezi de exemplu [13], vol. III, pct.528) putem schimba ordinea de integrare @n $S_A(x)$]i ob\inem:

$$S_A(x) = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du\int_0^A \cos z(u-x)dz = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin A(u-x)}{u-x}du$$

.

Prin schimbare de variabil[u-x=t, aceasta devine

$$S_A(x) = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin At}{t}dt = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} f(x+t)\frac{\sin At}{t}dt +$$

$$+\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{0} f(x+t)\frac{\sin At}{t}dt\,.$$

R[m`ne s[transform[m ultima integral[@nlocuind t cu - t]i s[scriem totul ca o singur[integral[.

❑

#n formularea urm[torului criteriu general al lui Dini pentru convergen\a punctual[(@n raport cu $x \in \mathbf{R}$) a integralei Fourier vom folosi aceea]i nota\ie ca]i la serii Fourier , (cap.I, §6)]i anume

$$j_{x,S}(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - S\,.$$

Ca]i la serii, num[rul S reprezint[aici presupusa valoare a integralei lui Fourier, adic[$\lim\limits_{A\to\infty} S_A(x)$.

7. **Teorem[**. (Criteriul lui Dini pentru integrala Fourier). *Dac[* $f \in L^1_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ *]i* $x \in \mathbf{R}$ *sunt astfel @nc`t func\ia*

$$\frac{j_{x,S}(t)}{t}$$

este absolut integrabil[pe un interval $(0,d)$, $d > 0$, *atunci @n acest punct x avem:* $\lim\limits_{A\to\infty} S_A(x) = S$.

Demonstra\ie. Se]tie (vezi integrala Poisson @n analiza real[sau complex[) c[

$$\int_0^\infty \frac{\sin At}{t}\,dt = \frac{p}{2}.$$

Amplific`nd cu *S* ob\inem

$$S = \frac{2}{p}\int_0^\infty S\,\frac{\sin At}{t}\,dt\,,$$

deci combin`nd cu (4) conform nota\iei pentru $j_{x,S}$, avem:

$$S_A(x) - S = \frac{2}{p}\int_0^\infty \frac{j_{x,S}(t)}{t}\,\sin At\,dt =$$

$$\frac{2}{p}\int_0^d \frac{j_{x,S}(t)}{t}\,\sin At\,dt +$$

$$+\frac{1}{p}\int_d^\infty \frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin At\,dt + \frac{2S}{p}\int_d^\infty \frac{\sin At}{t}\,dt\,.$$

Afirma\ia teoremei rezult[din aceea c[fiecare din ultimele trei integrale de aici tind la zero c`nd $A \to \infty$. #ntr-adev[r, aplic`nd lema lui Riemann primei integrale, lucru posibil conform ipotezei teoremei, ob\inem

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{j_{x,S}(t)}{t}\sin At\,dt = 0$$

La fel, deoarece *f* este absolut integrabil[pe **R**, func\ia

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}$$

este absolut integrabil[pe (d,∞), deci putem aplica din nou lema lui Riemann, ob\in`nd

$$\lim_{A\to\infty}\int_d^{\infty}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin At\,dt = 0\,.$$

#n sf`r]it, not`nd $At = q$, ultima integral[devine

$$\int_d^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt = \int_{A\cdot d}^{\infty}\frac{\sin q}{q}dq\,.$$

adic[reprezint[un rest al integralei improprii a lui $\dfrac{\sin q}{q}$, care se]tie c[este convergent[.

❑

Ca]i la serii, @n locul criteriului lui Dini sunt preferabile criterii cu ipoteze mai u]or de verificat, de]i mai restrictive:

8. **Corolar** (Criteriul lui Lipschitz). *Dac[pentru* $f \in L^1_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ *]i* $x \in \mathbf{R}$*, fixat, exist[* $d > 0$ *]i* $L > 0$ *astfel @nc`t pentru orice* $|t| < d$ *s[avem*

$$|f(x \pm t) - f(x)| \le L \cdot t\,,$$

atunci

$$f(x)=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}dz\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt\,.$$

Demonstra\ie. Verific[m ipoteza din criteriul lui Dini pentru $S=f(x)$, observ`nd c[

$$\frac{j_{x,S}(t)}{t}=\frac{1}{2}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}+\frac{1}{2}\frac{f(x-t)-f(x)}{t},$$

deci $\left|\frac{j_{x,S}(t)}{t}\right|\le L$ pentru $|t|<d$. #n concluzie, conform acestui criteriu, integrala Fourier converge c[tre $S=f(x)$. ❑

9. **Corolar** (Criteriul netezimii pe por\iuni). *Dac[$f\in L^1_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ este neted[pe por\iuni, atunci*

$$\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}dz\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt =$$

$$=\begin{cases} f(x) & \text{dac[} x \text{ este punct de continuitate pentru } f \\ \frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] & \text{dac[} x \text{ este punct de discontinuitate} \end{cases}$$

Demonstra\ie. Func\iile netede pe por\iuni @ndeplinesc condi\ia Lipschitz @n sensul c[

$$|f(x+t)-f(x+0)|\le Lt \quad \text{]i} \quad |f(x-t)-f(x-0)|\le Lt$$

pentru $t\in[0,d)$, deci inegalitatea

$$\left|\frac{j_{x,S}(t)}{t}\right|\le L$$

este din nou verificat[pentru $S = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0) \right]$. ❑

10. **Corolar** (Criteriu pentru "=" @n formula lui Fourier). *Dac[func\ia* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *satisface condi\iile:*

1) *f* este absolut integrabil[pe **R**, adic[$f \in L^1_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$;

2) *f* este neted[pe por\iuni;

3) $f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0) \right]$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$;

atunci are loc egalitate @n formula lui Fourier pentru *f*, adic[

$$f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt} dt$$

oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Demonstra\ie. #n criteriul netezimii pe por\iuni nu se mai face distinc\ie @ntre cazurile de continuitate]i discontinuitate @n punctul *x*, folosind ipoteza 3).

❑

11. **Nota\ie**. Datorit[importan\ei ei, clasa func\iilor care @ndeplinesc condi\iile 1), 2)]i 3) din corolarul 10 se noteaz[$C^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^*)$. #n particular, condi\ia 3) este verificat[dac[*f* este continu[.

12. **Observa\ie**. a) #n criteriile de mai sus am scris integrala Fourier @n form[complex[, dar @n mod evident putem pune peste tot integrala @n form[real[.

b) Deoarece func\iile derivabile sunt continue, pentru aceasta se verific[condi\ia 3 din corolarul 10, deci egalitatea @n formula integral[a lui Fourier are loc pentru func\iile netede]i absolut integrabile pe **R** (adic[din clasa $C^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \cap L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$).

c) Pentru func\ii pare, formula integral[a lui Fourier devine

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos zx\,dz\int_0^{\infty} f(t)\cos zt\,dt\ ,$$

@n timp ce pentru func\ii impare ea este

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\ zx\,dz\int_0^{\infty} f(t)\cos zt\,dt\ .$$

Aceste formule rezult[din (3) dezvolt`nd cosinusul diferen\ei ]i \in`nd cont de paritatea / imparitatea lui *f*.

P R O B L E M E

§ II. 1.

1 Verifica\i prin calcul direct c[formula integral[a lui Fourier @n form[complex[are loc pentru func\ia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, de valori

$$f(t)=\frac{1}{1+t^2}.$$

Compara\i cu calculul pentru integrala Fourier @n form[real[.

Indica\ie. Calcul[m mai @nt`i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itz}}{1+t^2}\, dt = \pi e^{-|z|} \ .$$

#ntr-adev[r, dac[$z<0$, aplic`nd teorema reziduurilor pentru conturul $\Gamma_r = [-r, r] \cup C_r$

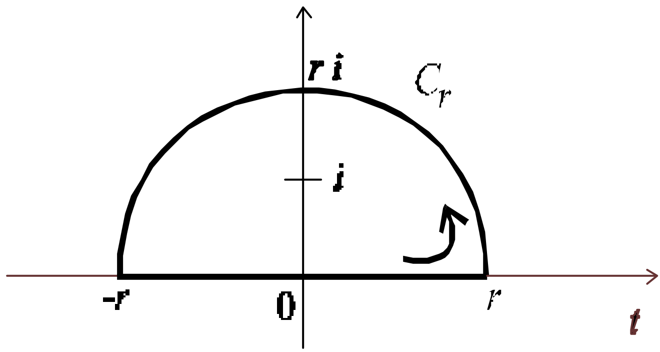


Fig. II.1.2.

]i trec`nd la limit[ c`nd $r \to \infty$, cu ajutorul lemei lui Jordan pentru integrala pe C_r, ob\inem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itz}}{1+t^2}\, dt = 2\pi i \operatorname{Rez}\left(\frac{e^{-itz}}{1+t^2}, i\right) = \pi e^{z} \ .$$

Pentru $z>0$, proced`nd la fel pe $\overline{C_r} \cup [r, -r]$, ob\inem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itz}}{1+t^2}\, dt = -2\pi i \operatorname{Rez}\left(\frac{e^{-itz}}{1+t^2}, -i\right) = \pi e^{-z} \ .$$

R[m`ne s[calcul[m integrala

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi e^{-|z|} e^{izx}\, dz = \int_{0}^{+\infty} e^{-z} \cos zx\, dz \ .$$

Pentru aceasta se integreaz[de dou[ori prin p[r\i]i se ob\ine rela\ia $I(x) = 1 - x^2 I(x)$.

#n concluzie $I(x) = f(x)$, deci se verific[egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt} dt \, .$$

Verificarea formulei Fourier @n form[real[necesit[@n esen\[acelea]i calcule, deoarece $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos zt}{1+t^2} dt$ se calculeaz[tot cu ajutorul reziduurilor.

2 Verifica\i prin calcul direct c[formula integral[a lui Fourier @n form[complex[are loc pentru func\ia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de valori

$$f(t) = e^{-t^2} \, .$$

Deduce\i o metod[de calcul al integralei lui Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{p} \, .$$

Indica\ie. Calcul[m mai @nt`i integrala

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-izt} dt = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} \cos zt \, dt \, .$$

Pentru aceasta deriv[m @n raport cu parametrul *z*, ob\in`nd

$$F'(z) = -2\int_0^{\infty} e^{-t^2} t \sin\ zt\, dt\ ,$$

iar apoi integr[m prin p[r\i, rezult`nd astfel c[

$$F'(z) = -\frac{1}{2} z F(z)\,.$$

Solu\ia general[acestei ecua\ii diferen\iale (cu variabile separabile) este

$$F(z) = Ce^{-\frac{z^2}{4}}\,.$$

Presupun`nd cunoscut[integrala lui Gauss, se determin[

$$C = F(0) = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{p}\ ,$$

deci

$$F(z) = \sqrt{p}\ e^{-\frac{z^2}{4}}\,.$$

R[m`ne s[calcul[m integrala

$$I(x) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{izx} dz = \frac{1}{2\sqrt{p}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4}} e^{izx} dz\ .$$

Pentru aceasta repet[m calculele de mai sus pentru integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\, t^2} e^{-izt}\ dt = \sqrt{\frac{p}{a}}\ e^{-\frac{z^2}{4a}}\ .$$

#n concluzie, pentru $a=\frac{1}{4}$, g[sim $I(x)=e^{-x^2}$. Deoarece egalitatea @n formula integral[a lui Fourier este asigurat[de criteriul netezimii, calculele de mai sus permit deducerea valorii integralei lui Gauss (p[str`nd pe C p`n[@n final, c`nd se determin[valoarea $C=\sqrt{p}$).

3 S[se reprezinte printr-o integral[Fourier func\ia

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{dac[} |x|<\frac{p}{2}\\ 0 & \text{dac[} |x|\geq\frac{p}{2}\end{cases}$$

]i s[se deduc[apoi valoarea integralei improprii $I=\int_0^\infty \frac{\cos\frac{pz}{2}}{1-z^2}\,dz$.

Indica\ie. Func\ia *f* @ndeplne]te condi\iile criteriului netezimii pe por\iuni, av`nd graficul ca @n fig. II.1.3.

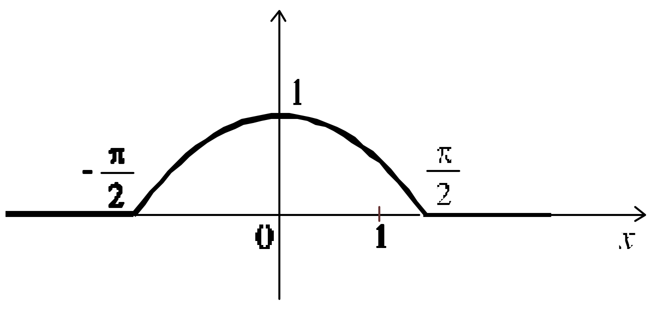


Fig.II.1.3.

Formula lui Fourier pentru func\ii pare ne d[

$$f(x) = \frac{2}{p} \int_0^{\infty} \cos zx \, dz \int_0^{\infty} f(t) \cos zt \, dz \, .$$

R[m`ne s[calcul[m

$$\int_0^{\infty} f(t) \cos zt \, dz = \int_0^{p/2} \cos t \cos zt \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{p/2} \cos(1+z)t \, dt + \frac{1}{2} \int_0^{p/2} \cos(1-z)t \, dt = \frac{1}{1-z^2} \cos \frac{p\, z}{2} \, .$$

#n concluzie, *f* se reprezint[prin integrala

$$f(x) = \frac{2}{p} \int_0^{\infty} \frac{\cos zx}{1-z^2} \cos \frac{pz}{2} \, dz \, .$$

#n particular, pentru $x = 0$, g[sim $1 = f(0) = \frac{2}{p} I$ (@n $z_0 = 1$ func\ia de integrat are o singularitate aparent[).

4 S[se reprezinte func\ia

$$f(x) = \begin{cases} \text{semn } x & \text{dac[} |x| \le 1 \\ 0 & \text{dac[} |x| > 1 \end{cases}$$

printr-o integral[Fourier]i s[se deduc[apoi valoarea integralei $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} (1 - \cos u) du$.

Indica\ie. Conform criteriului netezimii pe por\iuni, avem

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin zx\, dz \int_0^\infty f(t)\sin zt\, dt = \begin{cases} f(x) & \text{dac[} x \neq \pm 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{dac[} x = 0 \\ \pm\frac{1}{2} & \text{dac[} x = \pm 1 \end{cases}$$

Se calculeaz[

$$\int_0^\infty f(t)\sin zt\, dt = \int_0^1 \sin zt\, dt = \frac{1-\cos z}{z},$$

deci

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin zx}{z}(1-\cos z)dz = \begin{cases} \text{semn } x & \text{dac[} |x|<1 \\ \pm\frac{1}{2} & \text{dac[} x = \pm 1 \\ 0 & \text{dac[} |x|>1 \end{cases}$$

#n particular, *I* se ob\ine pentru *x*=1.

5 Se consider[func\ia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, dat[de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dac[} x<0 \text{ sau } x>\alpha \\ \frac{1}{2} & \text{dac[} x=0 \text{ sau } x=\alpha \\ 1 & \text{dac[} 0<x<\alpha \end{cases}$$

unde $\alpha>0$ este un num[r fixat. S[se reprezinte *f* printr-o integral[Fourier]i s[se deduc[valoarea integralei lui Poisson

$$P = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha z}{z}dz\,.$$

Indica\ie. Pentru *f* are loc egalitatea

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}dz\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt\,.$$

Se calculeaz[

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt=\int_{0}^{a} e^{-izt}dt=\frac{1-e^{-iza}}{iz}\,,$$

deci

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{izx}}{z}(1-e^{-iza})\,dz\,.$$

Pentru $x=\alpha$ se g[se]te

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z}[\sin\alpha z+i(1-\cos\alpha z)]dz=\frac{1}{2}\,,$$

de unde deducem c[$P=\dfrac{\pi}{2}$.

6 S[se rezolve ecua\iile integrale

a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\varphi(t)\sin zt\,dt=e^{-z}$;

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\varphi(u)\cos xu\,du=\frac{1}{1+x^{2}}$;

c) $$\int_{0}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\alpha u\,d\alpha=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\cos u & \text{dac[} u\in(0,\pi)\\ -\dfrac{\pi}{4} & \text{dac[} u=\pi\\ 0 & \text{dac[} u>\pi,\end{cases}$$

]tiind c[pentru j are loc egalitatea @n formula lui Fourier.

Indica\ie. a) #n formula lui Fourier pentru func\ii impare

$$j(x) = \frac{2}{p}\int_0^{\infty} \sin\ zx\ dz \int_0^{\infty} j(t) \sin\ zt\ dt$$

@nlocuim $\int_0^{\infty} j(t) \sin\ zt\ dt = e^{-z}$]i g[sim

$$j(x) = \frac{2}{p}\int_0^{\infty} e^{-z} \sin\ zx\ dz = \frac{2}{p}\frac{x}{1+x^2}\,.$$

b) Se procedeaz[ca la problema a), folosind formula lui Fourier pentru func\ii pare

$$j(t) = \frac{2}{p}\int_0^{\infty} \cos tx\, dx \int_0^{\infty} j(u) \cos xu\, du\ ,$$

astfel c[r[m`ne s[calcul[m

$$j(t) = \frac{2}{p}\int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\, dx = \frac{p}{2} e^{-t}$$

cu ajutorul teoriei reziduurilor (integrala lui Laplace; vezi]i problema 7)

c) $j(x) = \dfrac{x \sin px}{1-x^2}$, situa\ia fiind ca @n cazul b).

7 Folosind egalitatea @n formula lui Fourier pentru func\ia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de valori

$$f(x) = e^{-a|x|} \cos bx, \quad a > 0\,,$$

deduce\i valoarea integralei lui Laplace

$$L = \int_0^{\infty} \frac{\cos z}{z^2 + a^2}\, dz \,.$$

Indica\ie. Func\ia f este absolut integrabil[pe **R**, neted[pe $\mathbf{R}_+$]i pe $\mathbf{R}_-$, continu[pe **R**]i par[, deci

$$f(x) = \frac{2}{p} \int_0^{\infty} \cos zx \, dz \int_0^{\infty} f(t) \cos zt \, dt \,.$$

Se calculeaz[

$$\int_0^{\infty} f(t) \cos zt \, dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cos bt \cos zt \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(b + z)t \, dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(z - b)t \, dt \,.$$

Integr`nd de dou[ori prin p[r\i, pentru integrala

$$I = \int_0^{\infty} e^{-at} \cos\, lt \, dt$$

se g[se]te rela\ia $I = \frac{1}{a} - \frac{l^2}{a^2} I$, deci $I = \frac{a}{a^2 + l^2}$.

#n concluzie avem

$$\int_0^{\infty} f(t) \cos zt \, dt = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a^2 + (b + z)^2} + \frac{1}{a^2 + (z - b)^2} \right),$$

deci formula integral[a lui Fourier devine

$$f(x)=\frac{a}{p}\int_0^\infty\left[\left(\frac{1}{a^2+(z+b)^2}+\frac{1}{a^2+(z-b)^2}\right)\right]\cos zx\,dz\,.$$

#n particular, pentru $b=0$ g[sim:

$$\frac{2a}{p}\int_0^\infty\frac{\cos zx}{a^2+z^2}\,dz=e^{-a|x|}$$

iar pentru $x=1$ deducem $L=\dfrac{p}{2ae^a}$.

8 S[se calculeze integrala

$$I(x)=\int_0^\infty ue^{-\frac{u^2}{4}}\sin ux\,du\,.$$

Indica\ie. Scriem formula integral[a lui Fourier pentru func\ia

$$f(x)=xe^{-x^2},$$

adic[

$$xe^{-x^2}=\frac{2}{p}\int_0^\infty\sin ux\,du\int_0^\infty te^{-t^2}\sin tu\,dt\,.$$

Un calcul direct (prin p[r\i) ne arat[c[

$$\int_0^\infty te^{-t^2}\sin tu\,dt=\frac{u}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos tu\,dt\,.$$

Conform celor stabilite @n problema 2, avem

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos tu \, dt = \frac{\sqrt{p}}{2} e^{-\frac{u^2}{4}},$$

deci

$$\int_0^{\infty} te^{-t^2} \sin tu \, dt = \frac{\sqrt{p}}{4} ue^{-\frac{u^2}{4}}.$$

Revenind @n formula lui Fourier, ob\inem

$$xe^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_0^{\infty} u \sin ux \, e^{-\frac{u^2}{4}} \, du,$$

adic[$I(x) = 2x\sqrt{p}\, e^{-x^2}$.

§2. Transformata Fourier

Pe parcursul primei p[r\i a acestui paragraf vom considera numai func\ii pentru care are loc egalitatea @n formula integral[a lui Fourier, ca de exemplu func\ii integrabile pe **R**, netede pe por\iuni, pentru care $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ @n orice punct $x \in \mathbf{R}$, adic[func\ii din $C^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^*)$ sau @n particular din $L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \cap C^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$. Aceast[formul[va fi utilizat[@n diferitele ei forme (vezi §1):

- Forma complex[

$$f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-izt} dt \tag{1}$$

● Forma real[

$$f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(x-t)\, dt \qquad (2)$$

● Forma @n cos (pentru *f* par[)

$$f(x) = \frac{2}{p} \int_{0}^{+\infty} \cos zx\, dz \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos zt\, dt \qquad (3)$$

● Forma @n sin (pentru *f* impar[)

$$f(x) = \frac{2}{p} \int_{0}^{+\infty} \sin\, zx\, dz \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin\, zt\, dt\, . \qquad (4)$$

Acestor formule le vom da o nou[interpretare pe baza urm[toarei observa\ii fundamentale:

1. **Observa\ie**. #n fiecare din formulele (1)-(4) avem de calculat dou[integrale. Prin calculul primeia (a 2-a scris[) se trece de la func\ia *f* la o alt[func\ie @n variabil[*z*, ca apoi prin calculul celei de a 2-a (prima scris[) s[ne @ntoarcem la *f*.

Transformatele Fourier sunt tocmai aceste treceri de la o func\ie la alta realizate prin calculul c`te unei integrale, fapt precizat riguros de urm[toarea defini\ie:

2. **Defini\ie**. *Se nume]te* ***transformata Fourier complex[*** *a lui f func\ia* $F{:}\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, *dat[de formula*

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt}\, dt \qquad (1')$$

Not[m $F = \mathcal{F}(f)$, *unde* $\mathcal{F}$ *este* ***transformata Fourier complex[*** *ca operator @ntre spa\ii de func\ii.*

Formula (1), care se scrie acum sub forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{izx}\, dz \qquad (1'')$$

define]te **transformata Fourier invers[** (@n form[complex[]). Pentru aceasta not[m

$$f = \mathcal{F}^{-1}(F).$$

Dac[*f* este @n plus par[, atunci definim **transformata cos** a lui *f* prin formula

$$\underline{F(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos zt\, dt} \qquad (3')$$

]i not[m $F = \mathcal{C}(f)$. Operatorul $\mathcal{C}$ se nume]te **transformare cos**.

Formula ce rezult[din (3), adic[

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(z) \cos zx\, dz \qquad (3'')$$

define]te **transformata cos invers[**, pentru care not[m $f = \mathcal{C}^{-1}(F)$.

#n sf`r]it, dac[*f* este impar[, atunci definim **transformata sin** prin formula

$$F(z)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\infty} f(t)\sin zt\ \ dt \qquad (4')$$

]i not[m $F = S\ (f)$, unde S este **operatorul transformatei sin**.

Formula (4) devine

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\infty} F(z)\sin zx\ \ dz \qquad (4'')$$

]i define]te **transformata sin invers[**, notat[$f = S^{-1}(F)$.

Func\ia *f* se nume]te **original** iar *F* se nume]te **imagine**.

3. **Observa\ie**. Deosebirea @ntre transformatele Fourier directe]i inverse F]i F^{-1} se reflect[@n semnul exponentului de sub integralele respective. #n cazul func\iilor pare, respectiv impare, se vede cu u]urin\[c[$C = C^{-1}$]i $S = S^{-1}$.

Studiul transformatei Fourier const[@n stabilirea propriet[\ilor imaginii *F*, precum]i ale operatorului F . #n acest paragraf vom prezenta doar c`teva dintre aceste propriet[\i; ele de obicei sunt @n detalii studiate pentru transformata Laplace (vezi [9], [29], etc.)

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

care extinde transformata Fourier @n sensul c[@n loc de variabila pur imaginar[$-iz$, coeficientul lui *t* la exponen\ial[este num[rul complex $p = s + i s$.

4. **Teorem[**. *Imaginea* $F:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ *prin transformata Fourier are urm[toarele propriet[\i:*

a) *este continu[pe* **R**

b) *este m[rginit[pe* **R**

c) *are limita* 0 *la* $\pm\infty$.

Demonstra\ie. Prin ipotez[$F=\mathcal{F}\,(f)$, unde, a]a cum am convenit de la @nceputul paragrafului, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este absolut integrabil[pe **R**, neted[pe por\iuni]i continu[. Deoarece $\left|e^{-izt}f(t)\right|\le\left|f(t)\right|$, rezult[c[ ]i $e^{-izt}f(t)$ este absolut integrabil[pe **R**, deci *F* este definit[pentru orice $z\in\mathbf{R}$. Continuitatea lui *F* este o consecin\[a teoremei de trecere la limit[@n raport cu un parametru sub semnul integralei. M[rginirea rezult[din rela\iile

$$\left|F(z)\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-izt}f(t)\right|dt\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)\right|dt<\infty .$$

Proprietatea c) rezult[din lema lui Riemann descompun`nd

$$e^{-izt}=\cos zt-i\sin zt\ . \qquad \square$$

Proprietatea fundamental[a operatorului $\mathcal{F}$ este

5. **Teorem[**. *Operatorul* $\mathcal{F}$ *este* **R** - *liniar.*

Demonstra\ie. Rela\ia

$$\mathcal{F}\,(\alpha f+\beta g)=\alpha\mathcal{F}\,(f)+\beta\mathcal{F}\,(g)$$

este adev[rat[deoarece @n orice punct $z\in\mathbf{R}$ avem

$$\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}[a\ f(t)+b\,g(t)]e^{-izt}\ dt=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-izt}\ dt+\frac{b}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,e^{-izt}\ dt$$

@n baza liniarit[\ii integralei. ❑

Desigur, propriet[\i similare au operatorii C]i S .

6. **Teorem[**. (Propriet[\ile **algebrice** ale transfomatei Fourier). *Dac[* $F=\mathrm{F}\ (f)$*, atunci*

a) *pentru* $g(t)=f(kt)$ *avem* $\mathrm{F}\ (g)(z)=\frac{1}{|k|}F\left(\frac{z}{a}\right)$*, oricare ar fi* $k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ *(formula **asem[n[rii** sau **schimb[rii de scal[**)*

b) *pentru* $g(t)=f(t+t_0)$ *avem* $\mathrm{F}\ (g)(z)=e^{it_0z}F(z)$ *oricare ar fi* $t_0\in\mathbf{R}$ *(formula **@nt`rzierii / anticip[rii**)*

c) *pentru* $g(t)=e^{ita}f(t)$ *avem* $\mathrm{F}\ (g)(z)=F(z-a)$ *oricare ar fi* $a\in\mathbf{R}$ *(formula **deplas[rii**).*

Demonstra\iile sunt simple, directe,]i le l[s[m @n seama cititorului (de altfel ele se reg[sesc la transformata Laplace).

7. **Teorem[** (propriet[\ile **analitice** ale transformatei Fourier). *Fie* $f\in L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})\cap C^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ *]i* $F=\mathrm{F}\ (f)$*. Atunci*

a) *dac[pentru orice* $k\in\mathbf{N},\ 0\le k\le n$ *exist[* $f^{(k)}$ *]i avem* $f^{(k)}\in L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})\cap C^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$*, atunci*

$$\mathrm{F}\ (f^{(n)})(z)=(iz)^nF(z)$$

*(formula de **derivare a originalului**)*

b) *dac[pentru* $g_k(t) = t^k f(t)$ *avem* $g_k \in L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \cap C^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ *pentru to\i* $0 \le k \le n$, *atunci F este de n ori derivabil[ ]i avem:*

$$\text{F} \quad (g_n) = i^n F^{(n)}$$

*(formula de **derivare a imaginii**)*

c) f*unc\ia* h:$\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, *definit[prin*

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} f(q)\, dq$$

este de clas[$C^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ *]i dac[@n plus* $g \in L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$, *atunci*

$$\text{F} \quad (h)(z) = \frac{1}{iz} F(z)$$

(formula de ***integrare a originalului**)*

Demonstra\ie. a) Ra\ion[m prin induc\ie dup[$n \in \mathbf{N}$. Pentru $n = 1$ se integreaz[prin p[r\i @n

$$\text{F} \quad (f')(z) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izt} f'(z) dt$$

]i se \ine cont c[func\iile integrabile pe $\mathbf{R}$ au limita 0 la $\pm\infty$.

Trecerea de la n la $n+1$ se bazeaz[tot pe o integrare prin p[r\i.

b) Faptul c[g_k este neted[face posibil[derivarea @n raport cu parametrul z sub integrala care d[pe F .

c) #n particular f este continu[, deci h este o primitiv[a lui f . Se aplic[proprietatea a) func\iei h pentru $n = 1$.

❑

8 . **Observa\ii** . Dac[ne intereseaz[numai trecerea

$$f \xrightarrow{\mathcal{F}} F$$

nu]i inversa $\mathcal{F}^{-1}$, sau egalitatea @n formula lui Fourier, putem considera operatorul $\mathcal{F}$]i pe spa\ii mai convenabile, cum ar fi spa\iile de func\ii cu suport compact :

$$C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}_c) = \left\{ f \in C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) : \exists K \subset \mathbf{R} \text{ compact[, a.@. } t \notin K \Rightarrow f(t) = 0 \right\},$$

sau

$$C^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}_c) = \left\{ f \in C^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) : \exists K \subset \mathbf{R} \text{ compact[, a.@. } t \notin K \Rightarrow f(t) = 0 \right\}.$$

Men\ion[m c[prin **suportul** unei func\ii $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ @n\elegem mul\imea (@nchis[)

$$\text{supp } f = \overline{\{ x \in \mathbf{R} : f(x) \neq 0 \}}.$$

D[m mai jos c`teva propriet[\i specifice acestui cadru.

9. **Teorem[**. (Transformata **produsului de convolu\ie**) *Dac[* $f, g \in C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}_c)$ *au transformatele* $F = \mathcal{F}(f)$ *]i* $G = \mathcal{F}(g)$ *, atunci* $h : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *, definit[prin*

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q) g(t - q)\, dq$$

este]i ea @n clasa $C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}_c)$ *]i avem*

$$\mathcal{F}(h) = \sqrt{2p} \cdot F \cdot G$$

Func\ia h *se nume]te* ***produsul de convolu\ie*** *al lui f]i g ,]i se noteaz[* $h = f * g \quad (= g * f)$.

Demonstra\ie . Integralele care dau pe F ,G]i h se realizeaz[pe compacte. #n particular deducem c[h are suport compact]i este continu[. Transformat[F (h) este o integral[dubl[

$$\text{F}\ (h)(z)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izt}f(\boldsymbol{q})g(t-\boldsymbol{q})\,dt\,d\boldsymbol{t}.$$

Schimb`nd variabila $t \to t = t - q$, se eviden\iaz[un produs de dou[integrale, adic[

$$\text{F}\ (h)(z)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izq}f(\boldsymbol{q})\,d\boldsymbol{q}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izt}g(\boldsymbol{t})\,d\boldsymbol{t}$$

unde recunoa]tem

$$\text{F}\ (h)(z)=\sqrt{2p}\,F(z)G(z).$$

R[m`ne s[\inem cont c[$z \in \mathbf{R}$ este arbitrar. ❑

10. **Observa\ie**. Teorema de mai sus arat[c[produsul de convolu\ie este cel pe care transformata Fourier @l "duce" @n produsul obi]nuit al imaginilor, @n timp ce exemple simple arat[c[produsul obi]nuit al originalelor nu are aceast[proprietate (spre deosebire de adunare, sau @nmul\ire cu scalari). Pentru a da un r[spuns complet, men\ion[m c[produsul *fg* este transformat de F @ntr-un "produs de convolu\ie" al imaginilor, definit prin

$$(F*G)(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\boldsymbol{x})G(z-\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

Pentru aceasta este nevoie s[ne plas[m @ntr-un spa\iu de func\ii unde are loc egalitatea @n formula lui Fourier]i s[scriem transformata Fourier invers[

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} F(z)\, dz$$

Dac[amplific[m cu $g(x)$ ob\inem

$$\underline{(fg)(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\, e^{izx} g(x)\, dz}$$

unde observ[m c[

$$\underline{e^{izx} g(x) = F^{-1}(G(q - z))(x) =}$$

$$\underline{= \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixq} G(q - z)\, dq}$$

#n concluzie, avem

$$(fg)(x) = \frac{1}{2p} \iint_{\mathbf{R}^2} F(z) e^{ixq} G(q - z)\, dq\, dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixq} \left[\frac{1}{\sqrt{2p}} (F * G)(q) \right] dq =$$

$$F^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2p}} F * G \right](x) .$$

Men\ion[m c[transformata Laplace are propriet[\i similare fa\[de produsul de convolu\ie.

Considerarea spa\iului $C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}_c)$ este util[ ]i @n stabilirea formulelor lui Parseval, pe care le d[m mai jos, de]i acestea sunt valabile]i @n spa\ii mai largi, ca $L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \cap C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$.

11. **Teorem[**. (Prima formul[a lui Parseval). *Pentru orice func\ie* $f \in C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}_c)$*, care are transformata Fourier* $F = \mathrm{F}\ (f)$*, avem*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(z)|^2 \, dz .$$

Demonstra\ie. S[scriem formula

$$\mathrm{F}\ (f * g) = \sqrt{2p}\ F \cdot G ,$$

stabilit[@n teorema 9, cu ajutorul lui F^{-1}, adic[

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) G(z) e^{izx} \, dz .$$

#nlocuind $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q) g(x-q)\, dq$, pentru *x*=0 ob\inem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(q)\, g(-q)\, dq = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) G(z)\, dq .$$

#n aceast[formul[, valabil[pentru orice $f, g \in C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}_c)$, s[lu[m $g(q) = \overline{f(-q)}$; atunci $G(z) = \overline{F(z)}$, ceea ce duce la egalitatea c[utat[.

❑

12. **Interpretarea fizic[**. A]a cum am mai spus, func\ia $F = \mathcal{F}(f)$ reprezint[**spectrul continuu** al semnalului *f*. Dac[*f*(*t*) reprezint[intensitatea curentului electric la momentul *t* @ntr-un circuit cu rezisten\[1 ohm, atunci $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt$ reprezint[energia total[(pe @ntreaga existen\[) degajat[de circuit. Pe de alt[parte, func\ia $|F(z)|^2$ caracterizeaz[reparti\ia energiei pe spectrul semnalului, fapt pentru care se]i nume]te **caracteristica spectral[energetic[** a lui *f*. #n consecin\[putem spune c[prima formul[a lui Parseval statueaz[conservarea energiei prin trecerea de reprezentare @n amplitudine *f*, la reprezentarea spectral[*F*.

O consecin\[important[a formulei lui Parseval, cu aplica\ii @n fizic[, este urm[toarea:

13. **Teorem[** (rela\ia de incertitudine). *Fie* $f \in C^1_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}_c)$ *o func\ie neted[(cu* f' *continu[)]i cu suport compact, pentru care*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\, dt = 1.$$

Dac[$F = \mathcal{F}(f)$, *atunci*

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f^2(t)\, dt\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 |F(z)|^2 \, dz\right] \geq \frac{1}{4}.$$

Demonstra\ie. S[calcul[m integrala

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} [atf(t) + f'(t)]^2 \, dt =$$

$$= a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f^2(t)\, dt + 2a \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) f'(t)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(t)\, dt\,.$$

Integr`nd prin p[r\i ob\inem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) f'(t)\, dt = \frac{1}{2} t \cdot f^2(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\, dt = -\frac{1}{2},$$

deoarece *f* este cu suport compact.

Pe de alt[parte, F $(f')(z) = izF(z)$, deci conform primei formule a lui Parseval (teorema 11 aplicat[lui f') avem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 |F(z)|^2 \, dz\,.$$

#n concluzie trinomul

$$I(a) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f^2(t)\, dt - a + \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 |F(z)|^2 \, dz$$

este pozitiv pentru orice $a \in \mathbf{R}$. Inegalitatea enun\at[se ob\ine scriind c[discriminantul acestui trinom este negativ.

❑

14. **Interpretarea fizic[**. Cu c`t suportul lui *f* este mai concentrat @n jurul originii, valorile mari ale acestuia, care apar deoarece $\int f^2 = 1$, sunt anulate de factorul t^2, deci integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f^2(t)\, dt$ este mic[. #n consecin\[$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 |F(z)|^2\, dz$ trebuie s[fie mare, adic[spectrul *F* trebuie s[con\in[multe frecven\e @nalte.

15. **Teorem[** (A doua formul[a lui Parseval). *Fie* $f, g \in L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \cap C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ *]i* $F = \mathrm{F}\ (f)$, $G = \mathrm{F}\ (g)$. *Atunci*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(q) g(q)\, dq = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) f(t)\, dt\ .$$

Demonstra\ie. Dac[$f, g \in C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}_c)$ formula este imediat[@n urma schimb[rii de ordinii de integrare @ntr-o integral[dubl[pe un produs cartezian de compacte. Vom reduce cazul mai general, c`nd $f, g \in L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \cap C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$, la acesta, folosind o func\ie ajut[toare $j : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definit[prin:

$$j(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru} \quad x \in (-1, +1) \\ 0 & \text{pentru} \quad x \notin K \\ y(x) & \text{pentru} \quad x \in K \setminus (-1, +1), \end{cases}$$

unde $(-1, +1) \subset K =$compact din **R**, iar y este o func\ie continu[, astfel @nc`t]i j s[fie continu[(vezi fig.II.2.1).

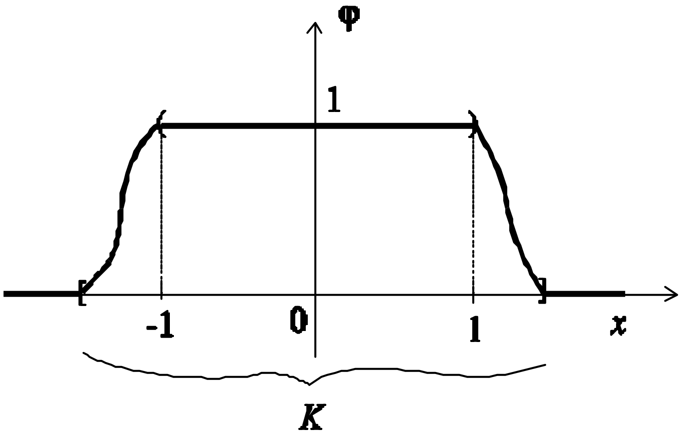


Fig. II.2.1.

Dac[not[m $f_e(x) = f(x)j(e x)$ se vede c[$f_e \in C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}_c)$, oricare ar fi $e > 0$, deci pentru $F_e = $ F (f_e)]i $G_e = $ F (g_e) avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_e(q) g_e(q)\, dq = \int_{-\infty}^{+\infty} G_e(t) f_e(t)\, dt\,.$$

#n aceast[formul[vom trece la limit[c`nd $e \to 0$, opera\ii ce nu altereaz[egalitatea deoarece

$$\lim_{e\to 0} f_e \overset{a.u.}{=} f, \qquad \lim_{e\to 0} g_e \overset{a.u.}{=} g,$$

$$\lim_{e\to 0} F_e \overset{u}{=} F, \qquad \lim_{e\to 0} G_e \overset{u}{=} G\,.$$

Integrabilitatea limitelor Fg]i Gf rezult[din integrabilitatea lui g]i egala m[rginire a familiei $\{F_e : e > 0\}$, adic[

$$\left|F_e(z)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{izt} f_e(t)\right| dt \leq \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f_e(t)\right| dt \leq \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t)\right| dt$$

respectiv din integrabilitatea lui f]i egala m[rginire a familiei $\{G_e : e > 0\}$. ❑

Dintre consecin\ele importante ale celei de a doua formule a lui Parseval men\ion[m un criteriu util @n stabilirea egalit[\ii @n formula lui Fourier pe o clas[de func\ii continue:

16. **Teorem[** (criteriu de inversabilitate a transformatei Fourier). *Fie* $f \in L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \cap C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$]i $F = \mathrm{F}\ (f)$. *Dac[ ]i* $F \in L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$, *atunci*

$$f = \mathrm{F}^{\ -1}(F),$$

adic[pentru orice $x \in \mathbf{R}$ *avem:*

$$f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt}\, dt\,.$$

Demonstra\ie. Vom scrie formula lui Parseval pentru perechea f, g unde $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are valorile $g(x) = e^{-\frac{e^2}{2}x^2}$, $e > 0$ fiind un num[r fixat. Se calculeaz[(ca @n problema 2, §II.1, sau folosind formula schimb[rii de scal[)

$$G(z) = \mathrm{F}\ (g)(z) = \frac{1}{e} e^{-\frac{z^2}{2e^2}}$$

]i deci avem (conform formulei lui Parseval)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(q) e^{-\frac{e^2 q^2}{2}}\, dq = \frac{1}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2e^2}} f(x)\, dx\,.$$

#n aceast[egalitate vom trece la limit[folosind rela\iile

$$\lim_{e\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} F(q) e^{-\frac{e^2 q^2}{2}}\, dq = \int_{-\infty}^{+\infty} F(q)\, dq$$

]i

$$\lim_{e\to 0} \frac{1}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2e^2}} f(x)\, dx = f(0)\cdot\sqrt{2p}\,.$$

Pentru a justifica aceste limite prin trecerea la limit[sub semnul integralei s[observ[m c[dac[pentru o familie de func\ii $\Phi_a : (a,b) \to \mathbf{R}$ avem $\Phi \overset{a.u.}{=} \lim_{a \to a_0} \Phi_a$]i exist[$y \in L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \cap C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ astfel @nc`t $|\Phi_a| < y$, atunci

$$\lim_{a\to a_0} \int_a^b \Phi_a(x)\, dx = \int_a^b \Phi(x)\, dx\,.$$

Cu acest rezultat ajut[tor prima limit[este evident[. Pentru a o stabili pe cea de a doua s[descompunem pe f @n forma

$$f = (1-j)\, f + j\, f\,,$$

unde j este func\ia ajut[toare din demonstra\ia formulei lui Parseval. #n aceast[descompunere func\ia $f_1 = (1-j) f$ se anuleaz[@n intervalul $(-1,+1)$, iar $f_2 = j\, f$ se anuleaz[@n afara acestui interval. Deoarece

$$\left|\frac{1}{e}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2e^2}} f_1(x)\,dx\right| \le \frac{1}{e} e^{-\frac{1}{2e^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx \xrightarrow[e\to 0]{} 0,$$

rezult[c[se verific[rela\ia enun\at[, adic[:

$$\lim_{e\to 0} \frac{1}{e}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2e^2}} f_1(x)\,dx = 0 = 2p\, f_1(0)\,.$$

Proced`nd asem[n[tor cu f_2 g[sim (dup[schimbarea de variabil[$x = e\,u$):

$$\frac{1}{e}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2e^2}} f_2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} f_2(e\,u)\,du$$

deci

$$\lim_{e\to 0} \frac{1}{e}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2e^2}} f_2(x)\,dx = f_2(0)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du =$$

$$\sqrt{2p}\, f_2(0) = \sqrt{2p}\, f(0)\,.$$

#n concluzie, prin trecerea la limit[ob\inem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(q)\,dq = \sqrt{2p}\, f(0)\,.$$

S[aplic[m acest rezultat func\iei $h(x) = f(x+t)$, cu $t \in \mathbf{R}$ arbitrar, pentru care (conform teoremei 6)

$$F\ (h)(z) = e^{izt}F(z).$$

Astfel ob\inem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itq}\, F(q)\, dq = \sqrt{2p}\, h(0) = \sqrt{2p}\, f(t)$$

ceea ce demonstreaz[teorema.

❑

Un alt cadru de tratare a transformatei Fourier, frecvent @nt`lnit @n literatur[, este cel al spa\iului $S$ al lui Laurent Schwartz. #n @ncheierea acestui paragraf vom prezenta c`teva aspecte specifice acestui caz (vezi [4], etc.).

17. **Defini\ie**. *Spunem despre func\ia* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *c[este* ***rapid descresc[toare*** *dac[ea este infinit derivabil[ ]i pentru orice* $p, q \in \mathbf{N}$, *func\iile* $f_{pq} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, *definite prin* $f_{pq}(x) = x^p f^{(q)}(x)$, *sunt m[rginite. Mul\imea tuturor acestor func\ii formeaz[clasa* S (a lui Schwartz).

18. **Exemple**. Exemplele cele mai frecvent utilizate sunt deduse din func\ia $f(t) = e^{-t^2}$. Alte exemple se pot ob\ine deriv`nd func\ii din S, sau @nmul\indu-le cu polinoame. De asemenea, faptul c[S este spa\iu liniar poate fi folosit @n producerea de exemple.

Deoarece func\iilor din clasa S li se impun unele condi\ii, aceast[clas[este relativ restr`ns[, a]a cum arat[ ]i urm[toarea:

19. **Propozi\ie**. $S \subset C^{\infty}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \cap L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \cap L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$.

Demonstra\ie. $\mathcal{S} \subset C^{\infty}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ prin defini\ie. Din $\left|x^2 f(x)\right| \leq M$ rezult[$\left|f(x)\right| \leq \dfrac{M}{x^2}$, unde $\dfrac{1}{x^2}$ este integrabil[pe **R**. Criteriul compara\iei pentru integralele improprii arat[c[ ]i $|f|$ este integrabil[, adic[$f \in L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$.

#n mod absolut analog, din $\left|x^4 f^2(x)\right| \leq M$ deducem c[ ]i $|f|^2$ este integrabil[pe **R**, adic[$f \in L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$.

❑

20. **Propozi\ie**. *Pentru func\iile rapid descresc[toare avem egalitate @n formula integral[a lui Fourier, adic[*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt}\, dt .$$

Demonstra\ie. Deoarece $\mathcal{S} \subset C^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \cap L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ putem aplica criteriul netezimii. ❑

O proprietate remarcabil[a spa\iului $\mathcal{S}$ este faptul c[transformata Fourier aplic[acest spa\iu @n el @nsu]i, lucru foarte important atunci c`nd vrem s[iter[m transformata $\mathcal{F}$.

21. **Teorem[**. *Pentru orice* $f \in \mathcal{S}$ *avem* $F = \mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$ *.*

Demonstra\ie . Folosind propriet[\ile analitice ale transformatei Fourier deducem c[*F* este derivabil[ ]i

$$F' = -i\,\mathcal{F}(tf(t)) ,$$

iar pe de alt[parte

$$zF(z) = \frac{1}{i}\mathcal{F}(f')(z)$$

deci $zF(z)$ este m[rginit[. Repet`nd acest ra\ionament rezult[c[*F* are orice derivat[(care este tot @n $\mathcal{S}$) iar $z^p F^{(q)}(z)$ este m[rginit[pentru orice $p,q \in \mathbf{N}$.

❑

22. **Observa\ii** . Pentru a vedea c`teva rezultate teoretice care au o mare aplicabilitate @n tehnic[recomand[m lucrarea [4] .

Spre exemplificare, aici vom reproduce doar unul dintre aceste rezultate, cunoscut ca teorema de e]antionare WKS, dup[numele a trei matematicieni care au fundamentat-o]i iau dat aplica\iile de baz[,]i anume Whittacker (1915), Kotelnikov (1933)]i Shannon (1948). #n esen\[aceast[teorem[permite reconstituirea unui semnal continuu *f* dintr-o e]antionare a acestuia @n ipoteza c[transformata sa Fourier are suport compact, adic[*f* are o band[de frecven\[m[rginit[, a]a cum se @nt`mpl[de obicei @n practic[.

Din punct de vedere al calculului este util s[folosim o func\ie specific[, $sa\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, numit[**sinus atenuat**]i definit[prin :

$$sa\ x = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dac[} x \neq 0 \\ 1 & \text{dac[} x = 0 \end{cases}$$

Ea este o transformat[Fourier, cum se vede @n

23. **Exemplu**. Transformata Fourier a func\iei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dac[} |x| \le b \\ 0 & \text{dac[} |x| > b \end{cases}$$

este $F(z)=\sqrt{\frac{2}{p}}\cdot b\cdot sa(bz)$.

#ntradev[r, particulariz`nd formula general[ob\inem

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-b}^{+b}e^{-izt}dt=\frac{1}{\sqrt{2p}}\frac{-1}{iz}\left[e^{-izb}-e^{izb}\right]=\frac{1}{\sqrt{2p}}\frac{2}{z}\frac{e^{izb}-e^{-izb}}{2i}$$

unde recunoa]tem formula lui Euler pentru sin.

24 . **Teorem[** . *Fie* $f\in L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})\cap C^0_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ *]i* $F=\sqrt{2p}\cdot$ F (f) *. Dac[* $supp\ F\subseteq[-b,b]$ *, pentru un* $b>0$ *, atunci din e]antionarea lui f cu pasul* $T=\frac{p}{b}$ *se poate reconstitui f conform formulei*

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}f(nT)sa(b(t-nT)).$$

Demonstra\ie. S[consider[m restric\ia lui F la $[-b,b]$, unde ea este nenul[ ]i s[o prelungim pe aceasta prin periodicitate, cu perioada $2b$. Seria Fourier complex[ata]at[acesteia va da

$$F(z)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k e^{ikTz}$$

pentru orice $|z|<b$ datorit[continuit[\ii lui F. Pentru coeficien\ii Fourier din aceast[serie avem

$$c_k=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{+b}F(z)e^{-ikTz}dz=\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)e^{-ikTz}dz=\frac{p}{b}f(-kT)$$

deoarece conform teoremei 16 are loc egalitatea @n formula lui Fourier pentru *f* . #n consecin\[@nlocuind $k = -n$ @n seria lui *F* , se ob\ine

$$F(z) = T\sum_{n\in \mathbf{Z}} f(nt)e^{-inTz} \quad .$$

Cu aceast[expresie a lui *F*, formula lui Fourier pentru *f* devine

$$f(t) = \frac{1}{2p}\int_{-b}^{+b} F(z)e^{itz}dz = \frac{T}{2p}\sum_{n\in \mathbf{Z}} f(nT)\int_{-b}^{+b} e^{itz}e^{-iTnz}dz \ ,$$

unde r[m`ne s[\inem cont de formula stabilit[@n exemplul 23, care introduce func\ia **sinus atenuat**.

❑ #n fine men\ion[m c[o serie de aplica\ii necesit[considerarea transformatei Fourier pentru func\ii generalizate (numite]i distribu\ii). Consider`nd c[o tratare riguroas[a acestor aspecte necesit[o aprofundare prealabil[a teoriei distribu\iilor, @n materialul de fa\[nu am f[cut referiri la acest caz. Pentru cititorul interesat recomand[m lucr[ri ca [3], [11], etc.

P R O B L E M E

§ II. 2.

1 Formula\i]i demonstra\i propriet[\i ale transformatei cos]i ale transformatei sin prin analogie cu cele stabilite @n teoremele 4-7 pentru F .

Indica\ie. Teoremele 4]i 5 au formul[ri]i demonstra\ii identice. Pentru celelalte propriet[\i trebuie combinate cele dou[transform[ri C]i S .

2 S[se rezolve ecua\iile integrale (cu necunoscuta *f*)

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{izt}\ dt = \begin{cases} |z| & \text{dac[}\quad z \in (-1,1) \\ \dfrac{1}{2} & \text{dac[}\quad z = \pm 1 \\ 0 & \text{dac[}\quad |z| > 1 \end{cases}$$

b) $$\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos zt\ dt = \frac{1}{a^2 + z^2}, \quad \text{unde}\ \ a > 0$$

c) $$\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin zt\ dt = \begin{cases} \cos z & \text{dac[}\quad z \in [0, \dfrac{p}{2}) \\ 0 & \text{dac[}\quad z \geq \dfrac{p}{2} \end{cases}$$

Indica\ie. a) Datorit[parit[\ii @n variabila *z*, putem considera c[prin ecua\ia dat[se precizeaz[transformata Fourier (complex[)

$$\sqrt{2p}\ F(z) = \begin{cases} |z| & \text{dac[}\quad z \in (-1,1) \\ \dfrac{1}{2} & \text{dac[}\quad z = \pm 1 \\ 0 & \text{dac[}\quad |z| > 1. \end{cases}$$

#n consecin\[$f = F^{-1}(F)$, adic[$f(x) = \frac{1}{2p}\int_{-1}^{1} |z| e^{izx}\ dz =$

$= \frac{1}{p}\int_{0}^{1} z \cos zx\ dz$, pentru care se integreaz[prin p[r\i.

b) Se interpreteaz[integrala ca o transformat[cos, iar *f* se afl[tot printr-o transformat[cos, care se calculeaz[cu teoria reziduurilor.

c) Ca @n cazul b), @n loc de transformata cos se lucreaz[cu transformata sin.

3 Ar[ta\i c[dac[$f \in S$, atunci]i $g \in S$, unde

$$g = f + F(f) + F^{2}(f) + F^{3}(f),$$

]i @n plus $F(g) = g$.

Indica\ie. Se observ[c[$F^{2}(f) = f_{-}$, unde $f_{-}(x) = f(-x)$, deoarece formula lui Fourier se poate scrie @n forma

$$f(-x) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz(-x)}\ dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt}\ dt.$$

#n consecin\[$F^{4}(f) = f$.

4 Calcula\i transformata Fourier pentru func\iile

1) $f(t) = e^{-at} h(t)$ 2) $g(t) = e^{-a|t|},\ \ a > 0$

]i verifica\i formula lui Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{2}(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(z)|^{2}\ dz.$$

Indica\ie. Avem

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-izt}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2p}}\,\frac{-1}{a+iz}\,e^{-(a+iz)t}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2p}}\,\frac{1}{a+iz}\,.$$

Exprim`nd $|t|$, pentru calculul lui *G* descompunem

$$G(z)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-izt}\,dt+\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-izt}\,dt\right]=\frac{1}{\sqrt{2p}}\,\frac{2a}{a^2+z^2}$$

.

Un calcul simplu conduce la

$$\int_0^{\infty} f^2(t)\,dt=\frac{1}{2a} \qquad \text{]i} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)\,dt=\frac{1}{a}$$

iar pe de alt[parte

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(z)|^2\,dz=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{a^2+z^2}=\frac{1}{2p}\,2\cdot\frac{1}{a}\,arctg\,\frac{z}{a}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{2a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|G(z)|^2\,dz=\frac{4a^2}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(a^2+z^2)^2}=\frac{2}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(a^2-z^2)+(z^2+a^2)}{(a^2+z^2)^2}\,dz=$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{z}{a^2 + z^2}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{a} arctg \frac{z}{a}\Bigg|_0^\infty \right] = \frac{1}{a}.$$

5 Afla\i transformata Fourier a func\iei $f(t) = A[\,h(t+l) + h(t-l)],\quad l > 0$]i deduce\i valoarea integralei

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2}\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz \qquad \text{(Poisson)}$$

Indica\ie. Se calculeaz[

$$F(z) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} e^{-izt}\, dt = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin zl}{z}.$$

Se utilizeaz[apoi prima formul[a lui Parseval, unde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\, dt = \int_{-l}^{l} A^2\, dt = 2A^2 l$$

]i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(z)|^2\, dz = \frac{2A^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 zl}{z^2}\, dz.$$

Lu`nd ]i *l*=1, se deduce $I = p$. Expresia lui *I* se poate modifica integr`nd prin p[r\i $\left(\frac{1}{z^2} = \left(\frac{-1}{z}\right)'\right)$, astfel c[ea se reduce la integrala lui Poisson $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz$.

6 Calcula\i transformata Fourier a func\iei

$$f(t) = \begin{cases} b(1+\frac{t}{a}) & \text{dac[} \quad t \in (-a, 0) \\ b(1-\frac{t}{a}) & \text{dac[} \quad t \in [0, a) \\ 0 & \text{dac[} \quad |t| \geq a \end{cases}$$

unde $a, b > 0$]i verifica\i principiul nedetermin[rii (teorema 13).

Indica\ie. Direct, sau folosind paritatea lui *f*, se ob\ine

$$F(z) = \frac{2b}{\sqrt{2p}} \int_0^a (1 - \frac{t}{a}) \cos zt \;\, dt = \frac{4b}{a\sqrt{2p}} \frac{\sin^2 \frac{a\,z}{2}}{z^2}.$$

Rela\ia de nedeterminare are loc @n ipoteza c[$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = 1$, deci calcul[m

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = 2b^2 \int_0^a (1 - \frac{t}{a})^2 dt = \frac{2}{3} ab^2$$

]i deducem restric\ia $ab^2 = \frac{3}{2}$.

Un calcul simplu conduce la

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \ f^2(t)dt = 2b^2 \int_0^a t^2 (1 - \frac{t}{a})^2 \ \ dt = \frac{b^2 a^3}{15} \ .$$

Pe de alt[parte

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \left| F(z) \right|^2 dz = \frac{8b^2}{pa^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 a\frac{z}{2}}{z^2} dz = \frac{4b^2}{pa^2} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos az)^2}{z^2} dz$$

Dezvolt`nd

$$(1 - \cos az)^2 = 2(1 - \cos az) - \sin^2 az = \ 4\sin^2 \frac{az}{2} - \sin^2 az$$

ob\inem @n continuare

$$J = \frac{16b^2}{pa^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 a\frac{z}{2}}{z^2} dz - \frac{4b^2}{pa^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 az}{z^2} dz \ ,$$

care dup[schimb[ri derivabile $a\frac{z}{2} = t$, respectiv $a\,z = q$]i o integrare prin p[r\i, devine

$$I = \frac{4b^2}{pa} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 q}{z^2} dz = \frac{4b^2}{pa} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2q}{q} dq = \frac{2b^2}{a} \ .$$

Aici s-a folosit integrala lui Poisson $\int_0^{+\infty} \frac{\sin q}{q} \, dq = \frac{p}{2}$. #n consecin\[, \in`nd cont de restric\ia $ab^2 = \frac{3}{2}$, produsul $I \cdot J$ devine

$$I \cdot J = 2\frac{b^2}{a} \cdot \frac{b^2 a^3}{15} = \frac{2}{15} a^2 b^4 = \frac{3}{10}.$$

Evident, $\frac{3}{10} = 0,3 > 0,25 = \frac{1}{4}$.

ANEXA II.1. : **Transformata Fourier discret[(TFD)**

#ntr-un sens deja discutat, putem spune c[spectrul discret al unui semnal periodic reprezint[o transformat[Fourier discret[. Sensul exact al no\iunii de **transformat[Fourier discret[** este @ns[legat de discretizarea necesar[@n calculul numeric al integralelor ce exprim[transformatele Fourier, atunci c`nd se face prelucrarea semnalelor pe calculator. Cu alte cuvinte, @n locul transformatei

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt}\, dt$$

a lui *f* @n *F*, vom considera o transformare a unui]ir (x_n) ob\inut prin e]antionarea semnalului *f* @ntr-un alt]ir (X_n) ce e]antioneaz[spectrul *F*. Pentru aceasta fix[m un **pas** $h > 0$]i ne limit[m la *N* valori ale lui *f*, anume

$$\{ f(nh) : n = 0, 1, \ldots, N-1 \},$$

adic[admitem c[*f* este suficient de bine reprezentat prin cele *N* e]antioane pe intervalul $[0, Nh)$.

#n consecin\[, integrala ce define]te pe *F* se aproximeaz[cu

$$F(z) \sim \frac{h}{\sqrt{2p}} \sum_{n=0}^{N-1} f(nh) e^{-iznh}.$$

Factorul $\frac{h}{\sqrt{2p}}$ este nesemnificativ aici, fiind eliminat printr-o simpl[schimbare de scal[. De altfel $2p$ este impus de formula lui Fourier, care con\ine]i transformata Fourier invers[, @n timp ce @n cazul discutat inversarea nu mai con\ine asemenea factori. #n concluzie, @n locul semnalului *f* vom lucra cu un]ir finit (x_n), $x_n = f(nh)$, $n = 0,1,\ldots,N-1$, iar @n locul transformatei *F* consider[m

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-iznh} .$$

Tehnicile de calcul impun @ns[ ]i discretizarea lui Φ. Pentru aceasta s[observ[m c[la @nceput variabila *z* avea semnifica\ia de pulsa\ie, $w = \frac{2p}{T} = 2pn$, deci este normal s[e]antion[m pe Φ @n puncte de forma $z = k2p\,\Delta n$, unde Δn este **pasul** re\elei, iar $k \in \mathbf{N}$. Not`nd $\Phi(k2p\,\Delta n) = X_k$ se ob\ine

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-ik2p\,\Delta n nh} .$$

S[observ[m c[dac[aici lu[m $\Delta n = \frac{1}{Nh}$, atunci]irul (X_n) este periodic, adic[

$$X_{k+N} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2p(k+N)\frac{n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2pk\frac{n}{N}} = X_k ,$$

deci acest]ir este determinat de *N* valori succesive

$$X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}.$$

Aceast[analiz[a procesului de dicretizare a formulei ce define]te transformata Fourier justific[urm[toarea:

1. **Defini\ie**. Spunem c[ ]irul finit $(N \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\})$

$$\{X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}\}$$

este **transformata Fourier discret[** a]irului (semnalului) finit $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ dac[pentru orice $k = 0,1,\ldots,N-1$ avem

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n q^{kn} \qquad (1)$$

unde $q = e^{-i\frac{2p}{N}}$. Aceast[transformare se noteaz[pe scurt $X = Dx$. Num[rul *N* se nume]te **lungimea** (sau **perioada**) semnalului.

#ntr-o serie de probleme se consider[ ]iruri periodice astfel c[suma se poate realiza pentru orice *N* valori consecutive ale lui $n \in \mathbf{Z}$.

D[m @n continuare c`teva propriet[\i ale transformatei Fourier discrete.

2. **Propozi\ie**. *Transformata Fourier discret[este un operator liniar pe* $\mathbf{R}^N$*, care @n baza canonic[se reprezint[prin matricea*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & q^2 & \dots & q^{N-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \dots & q^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q^{N-1} & q^{2(N-1)} & \dots & q^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

Demonstra\ie. Dac[not[m vectorial $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^{\mathrm{T}}$]i $X = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})^{\mathrm{T}}$, se vede imediat c[$lx + my$ este transformat @n $lX + mY$, oricare ar fi $l, m \in \mathbf{R}$. Pe de alt[parte, faptul c[X este T.F.D. a lui *x* se scrie matricial

$$X = Dx$$

unde *D* este matricea p[tratic[men\ionat[. ❑

Inversarea $x = D^{-1}X$ se realizeaz[u]or, conform urm[toarei:

3. **Propozi\ie**. *Inversa matricei D este*

$$D^{-1} = \frac{1}{N}\overline{D},$$

unde $\overline{D}$ *se ob\ine prin conjugarea complex[a lui D (adic[trecerea de la* $q = e^{-i\frac{2p}{N}}$ *la* $\overline{q} = e^{i\frac{2p}{N}}$*).*

Demonstra\ie. Deoarece $q\overline{q} = 1$, rezult[

$$D \cdot \overline{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & q^2 & \dots & q^{N-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \dots & q^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q^{N-1} & q^{2(N-1)} & \dots & q^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \overline{q} & \overline{q}^{2} & \dots & \overline{q}^{N-1} \\ 1 & \overline{q}^{2} & \overline{q}^{4} & \dots & \overline{q}^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \overline{q}^{N-1} & \overline{q}^{2(N-1)} & \dots & \overline{q}^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N \end{pmatrix} = NI_N \, .$$

#ntr-adev[r produsul dintre linia *k*]i coloana *k* ne d[

$$1 + q^k \overline{q}^k + \cdots + q^{k(N-1)} \overline{q}^{k(N-1)} = N$$

@n timp ce pentru linia *k*]i coloana $l \neq k$ avem

$$1 + q^k \overline{q}^l + \cdots + q^{k(N-1)} \overline{q}^{l(N-1)} = 1 + q^n + \cdots + q^{n(N-1)} = \frac{1 - q^{nN}}{1 - q^n},$$

unde am presupus $k > l$]i am notat $k - l = n$; pentru $k < l$ rezultatul este similar datorit[simetriei matricilor *D*]i $\overline{D}$. Elementele din afara diagonalei sunt nule deoarece $q^N = 1$, deci $1 - q^{nN} = 0$. ❑

Men\ion[m @n continuare alte c`teva propriet[\i ale T.D.F.

4. **Propozi\ie**. *Transla\ia secven\ei x corespunde unei rota\ii de faz[a T.D.F. X, adic[dac[* $X = Dx$ *]i* $y_n = x(n - n_0)$, *unde* $n_0 \in \mathbf{N}$, *atunci pentru* $Y = Dy$ *avem*

$$Y(k) = X(k) e^{-i \frac{2p}{N} k n_0} .$$

Demonstra\ie. Conform defini\iei avem

$$Y(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n-n_0)q^{kn}=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)q^{k(m+n_0)}=q^{kn_0}X(k),$$

unde am notat cu $m=n-n_0$ un nou indice care parcurge *N* valori consecutive din $\mathbf{Z}$. R[m`ne s[@nlocuim $q=e^{-i\frac{2p}{N}}$. ❑

Urm[toarea proprietate de simetrie este util[deoarece orice semnal real se descompune ca o sum[dintre un semnal par]i unul impar.

5. **Propozi\ie** (simetrie]i paritate/imparitate). *Fie* $x:\{0,1,\dots,N-1\}\to\mathbf{R}$ *o secven\[real[ ]i* $X=Dx$. *Atunci:*

a) $X(N-k)=\overline{X}(k)$ *pentru orice* $k\in\{0,1,\dots,N-1\}$

b) *dac[x este par[, atunci X este real[ ]i par[*

c) *dac[X este impar[, atunci X este pur imaginar[ ]i impar[.*

Demonstra\ie. a) Se calculeaz[

$$X(N-k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)q^{n(N-k)}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\overline{q}^{nk}=\overline{X}(k)$$

deoarece $q^N=1$.

b) Este convenabil s[consider[m $N=2p+1$, c`nd

$$X(N-k)=x(0)+2\sum_{n=1}^{p}x(n)\cos\frac{2p}{N}kn=X(k).$$

Faptul c[$X(k)\in\mathbf{R}$ rezult[compar`nd cu a).

c) Avem prin ipotez[$x(N-n)=-x(n)$, deci $x(0)=x(N)=0$. Pentru $N=2p+1$ rezult[

$$X(k) = -2i\sum_{n=1}^{p} x(n)\sin\left(\frac{2p}{N}nk\right) = -X(N-k).$$

#n particular se vede c[$X(k) \in i\mathbf{R}$, iar $X(0) = X(N) = 0$. ❑

T.F.D. se comport[fa\[de produsul de convolu\ie la fel ca]i transformata Fourier F . #nainte de a formula proprietatea respectiv[preciz[m c[prin **convolu\ia circular[** a dou[secven\e periodice, definite prin *n* valori $x, y:\{0,1,\ldots,N-1\} \to \mathbf{R}$ @n\elegem o secven\[$h:\{0,1,\ldots,N-1\} \to \mathbf{R}$ ale c[rei valori pentru $n \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ sunt:

$$h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\,y(n-m).$$

#n acest caz not[m $h = x * y$.

6. **Propozi\ie** (T.F.D. a convolu\iei circulare). *Fie* x, y *dou[secven\e finite]i* $h = x * y$. *Dac[X,Y]i respectiv H sunt T.F.D. ale lui x,y]i h, atunci*

$$H = X \cdot Y.$$

Demonstra\ie. S[observ[m c[*H* are aceea]i lungime (perioad[) *N*. Calcul[m (\in`nd cont de periodicitatea secven\elor *x*]i y):

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\,y(n-m)\right] q^{nk} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\left[\sum_{n=0}^{N-1} y(n-m)\,q^{(n-m)k}\right] q^{mk} =$$

$$= Y(k) \cdot \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\ q^{mk} = (XY)(k).$$

Deoarece aici *k* este arbitrar, rezult[$H = XY$. ❑

7. **Corolar** (Egalitatea lui Parseval). *Dac[x este o secven\[finit[de lungime N]i* $X = Dx$, *atunci*

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2.$$

Demonstra\ie. Dac[$X = Dn$, atunci conform teoremei de inversiune avem $x = \frac{1}{N}\overline{D}X$, deci $\overline{x} = \frac{1}{N} D\overline{X}$, adic[pentru orice $n = \overline{1, N-1}$ avem

$$\overline{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{X}(k) q^{kn}.$$

S[evalu[m membrul st`ng al egalit[\ii enun\ate

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\overline{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{k=0}^{N-1} \overline{x}(k) q^{kn} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{X}(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) q^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{X}(k) X(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2.$$

Inversarea ordinei de @nsumare este posibil[, sumele fiind finite. ❑

Analogia cu propriet[\ile transformatei F este evident[.

ANEXA II.2. : **Transformata Fourier rapid[**

Transformata Fourier rapid[(pe scurt TFR) este direct legat[de problemele de calcul ce apar @n realizarea pe computer a transformatei Fourier, a]a cum am v[zut @n anexa 1. Deoarece calculul valorilor $X(k)$ ale transformatei $X = Dx$ con\ine @nmul\iri @ntre $x(n)$]i q^{nn}]i adun[ri, s[consider[m c[o @nmul\ire @mpreun[cu o adunare formeaz[o **opera\ie elementar[**. Atunci calculul celor *N* valori $X(k)$ necesit[N^2 opera\ii elementare. Ideea de a accelera calculul transformatei *X* se bazeaz[pe reducerea num[rului de opera\ii elementare prin descompunerea lui *N* @n factori.

1. **Propozi\ie**. *Dac[* $N = P \cdot Q$, *cu* $P \neq N \neq Q$, *atunci num[rul de opera\ii elementare @n calculul T.F.D. este* $N(P+Q)$.

Demonstra\ie. O opera\ie elementar[se refer[la c`te o valoare pentru *k*]i *n* @ntre 0]i *N*-1. Scriind algoritmul @mp[r\irii lui *n* cu *P*]i respectiv a lui *k* cu *Q* ob\inem $n = Pn_2 + n_1$, respectiv $k = Qk_1 + k_2$, unde $0 \leq n_1, k_1 \leq P-1$, iar $0 \leq n_2, k_2 \leq Q-1$. Desigur, *n* este unic determinat prin perechea (n_1, n_2), iar *k* prin (k_1, k_2), deci @n loc de $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) q^{kn}$ putem scrie

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n_1, n_2) q^{Pk_2n_2} q^{kn_1}$$

deoarece $q^{kn} = q^{Nk_1n_2} q^{Pn_2k_2} q^{kn_1}$, unde $q^N = 1$. De fapt aici avem o sum[dubl[, adic[

$$X(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{P-1}\sum_{n_2=0}^{Q-1}x(n_1,n_2)\,q^{Pk_2n_2}q^{kn_1}=$$

$$=\sum_{n_1=0}^{P-1}C(n_1,k_2)q^{kn_1}$$

unde $C(n_1,k_2)=\sum_{n_2=0}^{Q-1}x(n_1,n_2)q^{Pk_2n_2}$. Se vede astfel c[pentru calculul coeficien\ilor $C(n_1,k_2)$ sunt necesare $PQ^2=NQ$ opera\ii elementare, dup[care $X(k_1,k_2)$ se ob\in prin $P^2Q=NP$ opera\ii elementare. #n concluzie avem @n total $N(P+Q)$ opera\ii elementare. ❑

2. **Observa\ie**. Deoarece $N^2\geq N(P+Q)$, propozi\ia de mai sus eviden\iaz[o reducere a num[rului de opera\ii elementare. Dac[num[rul *N* se poate desface @n mai mul\i factori, adic[

$$N=N_1N_2...N_m,$$

num[rul de opera\ii elementare se reduce de la N^2 la

$$N(N_1+N_2+\cdots+N_m).$$

Cazul cel mai utilizat @n practic[este $N=2^m$, c`nd avem:

3. **Corolar**. *Pentru* $N=2^m$ *num[rul de opera\ii elementare se reduce de* $\frac{2^{m-1}}{m}$ *ori.*

Demonstra\ie. Dac[$N=2^m$, atunci $N_1=N_2=\cdots=N_m=2$, deci $N_1+N_2+\cdots+N_m=2m$. Raportul

$$\frac{N^2}{N(N_1+\cdots+N_m)}=\frac{2^{2m}}{2^m\cdot 2m}=\frac{2^{m-1}}{m}$$

ne arat[de c`te ori avem mai pu\ine opera\ii. ❑

Prin **transformata Fourier rapid[** se @n\elege calculul termenilor secven\ei $X(k_1,k_2)$ prin intermediul coeficien\ilor $C(n_1,k_2)$, ca @n Propozi\ia 1 de mai sus. Dac[$N=2^m$]i *m* este mare, reducerea num[rului de opera\ii este semnificativ[, duc`nd la reduceri spectaculoase ale timpului necesar. De exemplu, pentru un calculator care face o opera\ie elementar[@n 30 ms, pentru *m*=12, timpul efectiv de calcul se rduce de la 8 min la 30 s, iar pentru *m*=20 reducerea se face de la 1 an la 20 minute.

Alte aspecte privind analiza Fourier pe calculator pot fi g[site @n [2], precum]i @n diverse manuale de utilizare a unor programe ca MAPLE, MATEMATICA, etc.

BIBLIOGRAFIE

[1] Balabanian N., ***Electric Circuits***, Mc.Grau-Hill, Inc., New York, 1994.

[2] Bellanger M., ***Traitement numérique du signal***; ***Théorie et pratique***, Masson, Paris, 1994.

[3] Bracewell R.N., ***The Fourier Transform and its Applications***, TOSHO Printing Co. Ltd. Tokio, Japan, 1983.

[4] Br@nz[nescu V., St[n[]il[O., ***Matematici Speciale***, Editura ALL, Bucure]ti, 1994.

[5] Bucur Gh., C`mpu E., G[in[S., ***Culegere de probleme de calcul diferen\ial]i integral***, vol.III, Editura Tehnic[, Bucure]ti, 1967.

[6] Budak B.M., Fomin S.V., ***Multiple integrals***, ***Field Theory and Series***, Mir, Moscow, 1973.

[7] Coc`rlan P., Ro]cule\ M., ***Serii Trigonometrice ]i Aplica\ii***, Editura Academiei Rom`ne, Bucure]ti, 1991.

[8] Cristescu R., ***Analiz[func\ional[***, E.D.P., Bucure]ti, 1970

[9] Crstici, B., et col. ***Matematici Speciale***, E.D.P., Bucure]ti, 1981.

[10] Demidovich, B., ***Problems in Mathematical Analysis***, Mir, Moscow, 1989.

[11] Efimov A.V., ***Mathematical Analysis - Advanced topics,*** Mir, Moscow, 1985.

[12] Efimov A.V., Demidovici B.P., ***Culegere de probleme de matematic[pentru @nv[\[m`ntul tehnic - capitole speciale de analiz[matematic[***, (limba rus[) Nauka, Moscova, 1981.

[13] Fihtenhol\ G.M., ***Curs de calcul diferen\ial]i integral***, Ed. Tehnic[, Bucure]ti, 1965.

[14] G`rla]u }t., ***Prelucrarea @n timp real a semnalelor fizice***, Editura Scrisul Rom`nesc, Craiova, 1978.

[15] Harris F.J., ***On the use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform***, Proc IEEE vol.66, No.1, January 1978.

[16] Hewitt E., Stromberg K., ***Real and Abstract Analysis***, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[17] Juk V.V., Natanson G.I., ***Serii Fourier*** (limba rus[), Ed. Univ. Leningrad, 1983.

[18] Lang S., ***Analysis I***, Addison - Wesley Publ. Comp. London, 1968.

[19] Myskis A.D., ***Introductory Mathematics for engineers***, Mir, Moskow, 1975.

[20] Nicolescu L.J, Stoka M.I., ***Matematici pentru ingineri***, vol.I, Editura Tehnic[, Bucure]ti, 1969.

[21] Pólya G., Szegö G., ***Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II***, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[22] Precupan A., ***Analiz[matematic[- Func\ii reale***, E.D.P., Bucure]ti, 1976.

[23] Predoi M., ***Analiz[matematic[***, EUC, 1994.

[24] Rudner V., ***Probleme de Matematici Speciale***, E.D.P., Bucure]ti, 1970.

[25] Stanomir D., St[n[]il[O., ***Metode matematice @n teoria semnalelor***, Editura Tehnic[, Bucure]ti, 1980.

[26] St[n[]il[O., ***Analiz[matematic[***, E.D.P., Bucure]ti, 1981.

[27] Stjebljezow W., ***Zusammenhang zwischen den Fourier Koeffizienten der nichtlinearen Funktionen und ihrer Ableitungen***, Z. Elektr. Inform. -u. Energietechnik, Leipzig 7(1977)4, S.319-324.

[28] Stuart R.D., ***Introducere @n analiza Fourier cu aplica\ii @n tehnic[***, Editura Tehnic[, Bucure]ti, 1971.

[29] }abac I.Gh., ***Matematici Speciale***, E.D.P., Bucure]ti, 1981.

[30] Trandafir R., ***Matematici pentru ingineri - culegere de probleme***, Editura Tehnic[, Bucure]ti, 1969.

[31] Vulih B.Z., ***Introducere @n analiza func\ional[***, (limba rus[), Nauka, Moscova, 1967.

C U P R I N S